

# Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

[www.joom.org.mx](http://www.joom.org.mx)

Ciudad de México. México. No. 12. Enero-Junio 2025

## OBJETOS MATEMÁTICOS

- **Breve exégesis sobre los estimadores de máxima probabilidad propuestos por Jacob Wolfowitz y L. Weiss.**  
*Francisco Guillermo Herrera Armendia.*
- **Teorema del Primo Cociente Minimal TPCM y Conjeturas de la Descomposición Primal Mixta.**  
*Jaime William Flores Tecalco.*
- **Teorema para el cálculo general de áreas de Lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral.**  
*Jonathan Josue Ornelas Tapia.*

## OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Diseño y modelo matemático de un control ANFIS para una termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR .**  
*Marcos Fajardo Rendón.*
- **Propuestas de modelos matemáticos en una RNA y teoría de colas.**  
*Fernando Gustavo Isa Massa.*

**Francisco Guillermo Herrera Armendia**  
Editor en Jefe.  
**herrera@joom.org.mx**

**Marcos Fajardo Rendón**  
Editor Ejecutivo.  
**fajardo@joom.org.mx**  
**Isaac Villavicencio Gómez**  
Coordinador Editorial.  
**villavicencio@joom.org.mx**

#### CONSEJO PERIODISTA

*Areli Guadalupe Mateos Sánchez.*

#### COMITÉ CIENTÍFICO

*Caballero Mora Karen Salomé.*

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

*Guzmán Sánchez Sergio.*

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

*Isa Massa Fernando Gustavo.*

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.

*Juárez Contreras Socorro.*

Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.

*Mendoza Pérez Armando Felipe.*

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

*Sentiés Nacaspac María de Jesús.*

Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

#### PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

#### Webmaster

*Marcos Fajardo Rendón*

**JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS**, No. 12, Enero-Junio 2025 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, [www.joom.org.mx](http://www.joom.org.mx) ; [revistajoom@gmail.com](mailto:revistajoom@gmail.com) .  
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.  
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.  
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 09 de abril de 2025.

# *Journal de* *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

*Número 12.*

*Enero-Junio de 2025*

*Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

*Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* número 12, enero-junio de 2025, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

# Contenido

<b>Carta del Editor</b>	<b>3</b>
-------------------------	----------

## OBJETOS MATEMÁTICOS

<b>Breve exégesis sobre los estimadores de máxima probabilidad propuestos por Jacob Wolfowitz y L. Weiss.</b>	<b>7</b>
<i>Brief exegesis on the maximum likelihood estimators proposed by Jacob Wolfowitz and L. Weiss.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

<b>Teorema del Primo Cociente Minimal TPCM y Conjeturas de la Descomposición Primal Mixta.</b>	<b>10</b>
<i>Minimal Prime Quotient Theorem (MPQ) and Mixed Primal Decomposition Conjectures.</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

<b>Teorema para el cálculo general de áreas de Lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral.</b>	<b>14</b>
<i>Theorem for the general calculation of areas of lunulae with an external arc equal to a semicircle using integral geometry.</i>	
<i>Jonathan Josue Ornelas Tapia.</i>	

## OBJETIVOS MATEMÁTICOS

<b>Diseño y modelo matemático de un control ANFIS para una termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR .</b>	<b>23</b>
<i>Design and mathematical model of an ANFIS control for a blister thermoforming machine using FIR artificial vision .</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

<b>Propuestas de modelos matemáticos en una RNA y teoría de colas.</b>	<b>37</b>
<i>Proposals for mathematical models in an ANN and queuing theory.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

## CARTA DEL EDITOR

Ofrecemos una breve reseña de las investigaciones realizadas por Jacob Wolfowitz, publicada en 1980 cuya secuencia calendárica es congruente con la de este 2025.

En 1980 la casa editorial Springer- Verlag publica la obra titulada “Jacob Wolfowitz Selected Papers” editada por J. Keifer del Departamento de Estadística de la Universidad de California en Berkeley, con la colaboración de U. Augustin y L. Weiss.

La obra incluye resultados muy relevantes de las investigaciones en el área de estadística de este ilustre matemático nacido en Varsovia, Polonia un sábado 19 de marzo de 1910 y que a la fecha de la publicación de esta obra laboraba para el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Sur de Florida pues había emigrado junto con su familia a Norteamérica en 1920. En conjunto, su trabajo de investigación produjo importantes y sorprendentes resultados en estadística teórica. Colaboró para el Grupo de Investigación en Estadística en la Universidad Columbia durante la segunda guerra.

En sus más de 40 años de investigación, sus resultados han sido clasificados por el editor y sus colaboradores en un formidable intento de incluirlos en las áreas de las matemáticas ya establecidas.

Los números entre paréntesis corresponden al orden en que aparecen en la bibliografía de la publicación; compartimos algunas de ellas. A) En el campo de la Inferencia No paramétrica se incluyen: (1) Límites de Confianza para funciones de Distribución Continuas; (9) Pruebas Estadísticas basadas en las permutaciones de las observaciones; (61) Carácter Asintótico Minimax de Muestras de Distribución. Función para variables vectoriales del azar; 49) Carácter Asintótico Minimax de Muestras de Distribución. Función y estimador multinomial clásico. B) En el campo del Análisis secuencial se pueden citar: (13) Sobre la estimación Binomial Secuencial; (15) La eficiencia de las estimaciones secuenciales y la Ecuación de Wald para los procesos secuenciales; (16) El carácter óptimo de la prueba de la razón de probabilidad secuencial; (85) Observación sobre el carácter óptimo de la prueba de la razón de probabilidad secuencial. C) En el área de la Teoría de la Decisión estadística se publican: (23) Soluciones de Bayes para los problemas de Decisión Secuencial; (25) Estimaciones Minimax de la media de una Distribución Normal con varianza conocida; (27) Eliminación de la aleatorización en ciertas decisiones estadísticas. Procedimientos y juegos de suma cero para dos personas. D) En el campo de la Teoría Estadística Asintótica, tenemos: (38) El Método de la Máxima Posibilidad y la Teoría de Wald sobre Funciones de Decisión; (42) Estimación del Método de la Distancia Mínima; (53) El Método de la Distancia Mínima. E) En el área de los Estimadores de Máxima probabilidad es interesante considerar lo que los editores escriben. Sean  $X_1, \dots, X_n$  observaciones independientes entre sí (variables aleatorias) con idéntica frecuencia de función  $f(\cdot | \theta)$  y que depende de un valor de un parámetro desconocido (para el estadístico). Además, sea  $k(n)$  un factor normalizador para un “buen” estimador de  $\theta$ .

Un estimador  $\Psi_n(X_1, \dots, X_n)$  se define ahora como un objeto matemático asintóticamente eficiente con respecto a un conjunto  $R \subseteq \mathbb{R}$  dentro del espacio de  $\theta$  si, entre todos los estimadores que satisfacen una condición de regularidad natural, el límite

de  $P_0 \{k(n)(\Psi_n - \theta) \in R\}$  es el mayor para todos los valores admisibles de  $\theta$ . Un estimador  $Z_n(X_1, \dots, X_n)$  se denomina estimador de máxima probabilidad (MP, por sus siglas en inglés) si este objeto matemático maximiza la integral:  $\int \prod_{i=1}^n f((X_i) | \theta) d\theta$  sobre el conjunto  $\{\theta \mid \theta \in d - [k(n)]^{-1} R\}$ , con respecto a  $d$ . En su artículo titulado Estimadores de máxima Probabilidad (88) Wolfowitz demuestra que el estimador MP es asintóticamente eficiente con respecto a  $R$ .

En realidad, se muestra bajo condiciones mucho más generales que aquellos en que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas.

Además, el parámetro  $\theta$  no necesita ser unidimensional. Ciertas modificaciones a la solución de la integral arriba descrita (sobre el estimador MP) muestran ser asintóticamente equivalentes y como consecuencia, también asintóticamente eficientes (con respecto a  $R$ ) que, en sí, puede depender de  $\theta$ .

Por otro lado, Wolfowitz consideró en sus artículos Estimación de máxima posibilidad de un parámetro de traducción de una distribución truncada (108), Estimadores de probabilidad máxima en el caso clásico y en caso “casi plano” (111), Estimadores asintóticamente eficientes cuando las densidades de las observaciones tienen discontinuidades (114) las clases de problemas que no se relacionan con los casos “regulares”. Consecuentemente, la teoría del estimador MP se extiende a la aplicación para una función general de pérdida, analizada en su artículo Estimadores de probabilidad máxima con una función general de pérdida (95); La función de pérdida correspondiente a un conjunto  $R$  es, en sí, la función de pérdida  $0 - 1$ .

Consecuentemente, en su artículo titulado Estimadores de Probabilidad Máxima y suficientemente asintóticos (100) una estadística está definida por ser asintóticamente suficiente si, (asintóticamente) el estimador MP es una función únicamente de esta estadística. F) En el área del Diseño de Experimentos en el que Jack Kiefer, uno de los editores de este libro ha contribuido al desarrollo de la modernización de esta teoría, con base en la elección de valores en un espacio dado  $\mathcal{T}$  de la variable independiente (controlable) en una regresión establecida, que generará el estimador de mínimos cuadrados (LSE) por sus siglas en inglés o coeficientes de regresión aproximadamente óptimos, en sentido específico, para tamaños de muestra grandes.

En el artículo denominado Diseño Óptimo en problemas de regresión (60), Wolfowitz ofrece la solución para la estimación óptima de un solo coeficiente de regresión en términos de un problema de aproximación relacionado con Chebyshev; de igual manera, analiza la minimización de la determinante de la matriz de covarianza (varianza generalizada) de estimadores de cualquier número de coeficientes. En el caso de que todos los coeficientes deben ser estimados Wolfowitz muestra este criterio en su artículo titulado: La equivalencia de dos problemas extremos (64) y que es equivalente al criterio de elección de diseño que minimiza el valor máximo sobre  $\mathcal{T}$  de la varianza en cualquier punto de la regresión misma LSE, y que es el primero de una serie de resultados de “equivalencia” para otros criterios que han surgido subsecuentemente en esta área y que son métodos útiles para el cálculo de diseños óptimos tanto de forma analítica como a través de rutinas iterativas para computadora.

El autor investigó sobre problemas de extrapolación de regresión a una región fuera de  $\mathcal{T}$  así como también la interpolación hacia una región que es subconjunto de  $\mathcal{T}$  y están publicados con el título de Extrapolación óptima y diseños de extrapolación I, (77) II (78) junto con J. Kiefer (78) siempre y cuando la región sea un conjunto asimétrico en la vecindad de 0y el modelo sea una regresión polinomial con le condición  $\mathcal{T} = [-1, 1]$ . G) Sus resultados de investigación fueron muy amplios en otras áreas de la inferencia estadística.

En el artículo titulado Límites de tolerancia para una distribución normal (11) y en colaboración con A. Wald tratan sobre el cálculo de los límites de tolerancia para la distribución normal con media y varianza desconocidas; en la contribución titulada Límites de confianza para una fracción de la población normal comprendidos entre dos límites dados (12) ofrece una aproximación para el problema sorprendentemente difícil de determinar un intervalo de confianza para la probabilidad de asignar un intervalo específico aplicando la regla normal.

Su artículo titulado El poder de las pruebas clásicas asociadas con la distribución normal (21) es todo un clásico en la literatura estadística pues propone propiedades óptimas de varias pruebas relacionadas con la teoría normal clásica anticipándose a resultados de investigación posteriores con resultados muy similares; influyó mucho también en investigadores que publicaron resultados para condiciones sobre varios conjuntos de distribuciones que permiten tomar decisiones correctas, con alta probabilidad de fijar la regla correcta para muestras bastante grandes en su publicación titulada: Cómo distinguir conjuntos de distribuciones (59). H) Wolfowitz se involucró mucho en la ruta que siguió el pensamiento estadístico, así como los sistemas fundamentales que la han inspirado, en particular siendo muy escéptico con algunos de los primeros autores del pensamiento Bayesiano al grado de eliminar muchas dificultades estadísticas, al realizar comentarios muy convincentes sobre varios aspectos prácticos relacionados con estos aspectos al estudiar detalladamente los axiomas de la teoría bayesiana y formular aspectos críticos sobre ella.

Realizó también cuantiosas investigaciones en la Teoría de la información con más de 25 publicaciones en esta área; por ejemplo, en su artículo titulado Canales de funciones de probabilidad que varían arbitrariamente (72), en colaboración con J. Kiefer, es el primero publicado con resultados sobre canales de variación arbitraria y se refiere a la codificación simultánea de canales con respecto a todos los estados cuando el conjunto de estados es un producto Cartesiano con el tiempo. Propone las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tasas de código positivas para cualquier probabilidad de error  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) validada para el argumento de código de grupo.

Los resultados de sus cuantiosas investigaciones de pueden sintetizar en problemas de canales y de código, que son básicamente, problemas de tiempo finito; además propone una nueva aproximación al teorema de Shannon, relacionada con un acercamiento al intervalo de confianza, demostrando en recíproco de este teorema, en su artículo denominado Aproximación a un criterio de confianza (82). I) En Teoría de la Probabilidad, Wolfowitz realizó importantes investigaciones.

En su reporte de investigación titulado: Observaciones sobre la noción de recurrencia (20), escribe una prueba extremadamente simple del Teorema de recurrencia

de Poincaré relacionado con las medidas finitas no necesariamente probabilísticas, así como a la fórmula de Kac para el tiempo medio de recurrencia.

Durante la segunda guerra, estuvo investigando sobre la configuración geométrica que describe un conjunto convexo en movimiento al entrar en contacto con una partícula de movimiento aleatorio, y que reportó en su artículo titulado: Las distribuciones de ángulos planos en contacto (19). En colaboración con Chung, generalizaron un célebre resultado propuesto por Erdős, Feller y Pollard y que es consecuencia de un trabajo de Kolmogorov, en la publicación titulada Sobre un teorema del límite en teoría renovada, demostrando que valores enteros de una secuencia de datos aleatorios independiente e idénticamente distribuidos  $X_i$  con esperanza positiva y muy posiblemente infinita  $m$ , el número esperado de veces  $n$  que  $S_n = j(1 \leq n < \infty)$  se aproxima a  $t/m$ , con  $j \rightarrow \infty$ ; donde  $t$  representa el máximo común divisor de los valores que sostienen la Ley de Probabilidad sobre  $X_i$ .

En este doceavo número en la sección objetos matemáticos se presenta un trabajo que continúa el discurso editorial “Breve exégesis sobre los estimadores de máxima probabilidad propuestos por Jacob Wolfowitz y L. Weiss”, así como una propuesta innovadora denominada “Teorema del Primo Cociente Minimal TPCM y Conjeturas de la Descomposición Primal Mixta” y un algoritmo novedoso denominado “Teorema para el cálculo general de áreas de Lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral.”

Para la sección de objetivos se presentan trabajos de inteligencia artificial en ingeniería como el “Diseño y modelo matemático de un control ANFIS para una termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR” e investigación de operaciones con “Propuestas de modelos matemáticos en una RNA y teoría de colas”.

*Los editores.*

# Breve exégesis sobre los estimadores de máxima probabilidad propuestos por Jacob Wolfowitz y L. Weiss.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México.

[harmendia@gmail.com](mailto:harmendia@gmail.com) <https://orcid.org/0000-0002-64838350>

**Resumen-** Los resultados de investigación en el área de la estadística matemática realizados por Jacob Wolfowitz han sido muy relevantes para el avance de este objeto matemático. Una de sus publicaciones describe y demuestra las proposiciones matemáticas inherentes a los estimadores de máxima probabilidad. Su importancia se basa en maximizar la medida de la probabilidad del enunciado propuesto para que se obtenga como resultado los datos observados. Empiezo con la descripción breve del Método de la máxima fiabilidad, como un antecedente necesario para abordar un ligero estudio sobre los Estimadores de Máxima Probabilidad. Para ello, propongo 11 definiciones, 4 consecuencias y 3 consecuencias inmediatas, desde un enfoque axiomático. En el artículo original, estas últimas son los teoremas propuestos por los autores, sin embargo y para efectos de esta breve exégesis, los describo como enunciados consecuentes de un convincente análisis propuesto por los autores.

**Palabras Clave-** estimadores, probabilidad máxima, fiabilidad.

**Zusammenfassung-** Die Forschungsergebnisse von Jacob Wolfowitz auf dem Gebiet der mathematischen Statistik waren für die Weiterentwicklung dieses mathematischen Gebiets von großer Bedeutung. Eine seiner Veröffentlichungen beschreibt und demonstriert die mathematischen Aussagen der Maximum-Likelihood-Schätzer. Ihre Bedeutung liegt in der Maximierung des Wahrscheinlichkeitsmaßes der vorgeschlagenen Aussage, sodass die beobachteten Daten als Ergebnis erhalten werden. Ich beginne mit einer kurzen Beschreibung der Methode der maximalen Zuverlässigkeit als notwendigem Hintergrund für eine kurze Studie der Maximum-Likelihood-Schätzer. Zu diesem Zweck schlage ich 11 Definitionen, 4 Konsequenzen und 3 unmittelbare Konsequenzen aus einem axiomatischen Ansatz vor. Im Originalartikel sind dies die von den Autoren vorgeschlagenen Theoreme; für die Zwecke dieser kurzen Exegese beschreibe ich sie jedoch als konsequente Aussagen einer von den Autoren vorgeschlagenen überzeugenden Analyse.

**Schlagwörter-** Schätzer, maximale Wahrscheinlichkeit, Zuverlässigkeit.

**Резюме-** Результаты исследований в области математической статистики, проведенных Якобом Вулфовицем, были весьма актуальны для продвижения этого математического объекта. Одна из его публикаций описывает и демонстрирует математические предложения, присущие оценкам максимального правдоподобия. Их важность заключается в максимизации меры вероятности предлагаемого утверждения, чтобы наблюдаемые данные были получены в результате. Я начинаю с краткого описания метода максимальной надежности в качестве необходимого фона для краткого изучения оценок максимального правдоподобия. С этой целью я предлагаю 11 определений, 4 следствия и 3 непосредственных следствия из аксиоматического подхода. В оригинальной статье эти последние являются теоремами, предложенными авторами; однако, и для целей этого краткого толкования, я описываю их как последовательные утверждения убедительного анализа, предложенного авторами.

**Тези-** оценички, максимално правдоподобие, надежност.  
**Mathematical Subject Classification:** 62F10

## I. INTRODUCCIÓN

El método de fiabilidad máxima es uno de los procedimientos generales para establecer estimadores de parámetros desconocidos en la Teoría de la estimación estadística. En 1969, Jacob Wolfowitz publicó su artículo denominado Estimadores de Probabilidad Máxima con una función general de pérdida, en colaboración con L. Weiss. El propósito central de su artículo es resolver el problema de la estimación asintótica en su forma más general, para así extender los resultados a la generalización del método de la fiabilidad máxima, que para entonces se le habían observado algunas deficiencias como: a) el método se aplicaba bajo condiciones regularmente muy fatigosas, b) sólo los estimadores que se distribuyen normalmente de forma asintótica podían competir con el estimador de fiabilidad máxima, c) Los resultados clásicos eran bastante limitados para el caso  $m=1$ , donde  $m$  representa la dimensión del parámetro desconocido, d) la teoría normalmente se aplica a casos con variables de posibilidades independiente e idénticamente distribuidas. Los autores proponen 3 teoremas, con sus pruebas detalladas.

En la presente contribución propongo con base en el método genético, la descripción axiomática necesaria para interpretar los 3 teoremas antes mencionados, pero como consecuencias inmediatas ligadas a la secuencia de enunciados matemáticos.

## II. MÉTODO DE MÁXIMA FIABILIDAD.

**Definición (Def.) 1.-**  $\hat{\theta}$  representa el estimador de máxima fiabilidad [1].

**Def. 2.-** Para alguna observación  $X$ , existe una distribución  $P_{\theta}$  dependiente de algún parámetro desconocido  $\theta$ , que es elemento de  $\Theta$  con la siguiente condición:  $\theta \in \Theta \subseteq R^k$ , es decir, existe una relación de pertenencia al conjunto numérico  $R$ - dimensional, considerando la sucesión de elementos  $\theta$  en  $\Theta$ .

**Def. 3.-** Sea  $\nu$  la representación de una medida común, al suponer que todos los valores  $P_{\theta}$  son absolutamente continuos y están relacionados entre sí.

Def. 4.- La función de fiabilidad  $L(\theta)$  está representada por:

$$L(\theta) = \frac{d P_{\theta}}{d v} (X) \quad (1)$$

Consecuencia 1.-

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta). \quad (2)$$

Que representa la estadística o la función de máxima fiabilidad  $\hat{\theta}$  al elegirse  $\theta$  como su estimador [3].

Def. 5.- Para una clase amplia de casos,  $\hat{\theta}$  es la solución de la ecuación de fiabilidad con su máximo elemento  $k$ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\theta) = 0, \quad 1 \leq i = 1, \dots, k; \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k). \quad (3)$$

Escolio 1.- Sea una secuencia de variables aleatorias independientes, es decir, observaciones [1] [2]  $X = (X_1, \dots, X_n)$  condicionadas por una distribución común  $P_{\theta}$  con  $\theta \in \Theta$ . Si en la expansión de la expresión:  $f(x, \theta)$  existe densidad, es decir:  $f(x, \theta) = \frac{d P_{\theta}}{d m} (x)$ , con relación a alguna medida  $m$ , entonces:  $L(\theta) = \prod_{j=1}^n f(X_j, \theta)$  [4].

Consecuencia 2.- Por Escolio 1, Def. 2- 6, (3) se reescribe:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(X_j, \theta) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Escolio 2.- Considerando la siguiente igualdad:  $X = X_t$ , que representa un proceso de difusión con diferencial estocástico [1] [2] [5] se escribe la siguiente expansión:  $dX_t = \theta a_t(X_t) + dW_t$ , con  $X_0 = 0$ ;  $0 \leq t \leq T$ , en la que  $W_t$  representa el proceso Wiener [1] [2] [6],  $\theta$  un parámetro unidimensional desconocido,  $T$  el máximo  $t$ -elemento de la serie. Al expandirse la expresión que describe el logaritmo de la función de fiabilidad (Def. 4 y 6), se tiene:

$$\log L(\theta) = \theta \int_0^T a_t(X_t) dX_t - \frac{\theta^2}{2} \int_0^T a_t^2(X_t) dt.$$

Consecuencia 3.- El estimador de máxima fiabilidad  $\hat{\theta}$  presenta la siguiente expansión:

$$\hat{\theta} = \left( \int_0^T a_T(X_T) dX_T \right) \left( \int_0^T a_t^2(X_t) dt \right)^{-1} \text{ por Escolio 2.}$$

### III. ESTIMADORES DE MÁXIMA PROBABILIDAD CON UNA FUNCIÓN DE PÉRDIDA GENERAL.

Def. 6.- Sea  $X_n$  la variable de posibilidad observada (Escolio 1), cuya densidad con relación a una  $\sigma$ -medida finita  $\mu_n$  de Lebesgue [7] depende de un parámetro desconocido  $\theta$  (Def. 2) y localizado en un punto  $x$  descrito por  $K_n(x, \theta)$ .

Def. 7.- Se tiene la siguiente expansión:  $X_n = (x_1, \dots, x_n)$  en el que todos los elementos del conjunto están independientemente e idénticamente distribuidos (Escolio 1) en la función de densidad:  $f(x, \theta)$ , entonces se tiene la medida de Lebesgue  $\mu_n$  [8] sobre un  $n$ -espacio,  $K_n(x, \theta)$  (Def. 6). Además, la expansión descrita al principio de esta definición se puede reescribir  $\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ , también por (Escolio 1).

Def. 8. El estimador de máxima probabilidad  $Z_n$  [7] de  $\theta$  y con respecto a  $R \subseteq \mathbb{R}$  (Def.2), es equivalente al valor  $d$  para el que La integral indefinida:  $\int K_n(X(n), \theta) d\theta$  sobre el conjunto  $d - \{[k(n)]^{-1} R\}$ , representa su máximo.

Consecuencia 4.- La desigualdad (por Def. 8):

$$\lim P\{K(n)(Z_n - \theta) \in R, \theta\} \geq \overline{\lim} P\{k(n)(T_n - \theta) \in R, \theta\} \quad (5)$$

Es válida para cualquier estimador  $T_n$ .

Def. 9.- Sea  $H_n$  el conjunto al que pertenecen todas las secuencias  $\theta_n$ .

Def. 10.- La convergencia uniforme se describe:  $H_n = \{\theta \leq h_1(n)\}$ .

### IV. CONSECUENCIAS SOBRESALIENTES INMEDIATAS BASADAS EN EL ANÁLISIS ANTERIOR.

Consecuencia Inmediata 1.- Sea el estimador  $Y_n$  con la condición de que satisfaga las siguientes propiedades:

- i) El límite de la función de fiabilidad del estimador  $Y_n$  con relación a algún parámetro desconocido pueda converger en otro parámetro desconocido.
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{s(n)P[|k(n)(Y_n) - \theta| > k_2(n), \theta]\} = 0$ . (Def. 2 y 6);  $s(n)$  representa la secuencia de elementos en  $P$ .
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int L_n(Y_n(x), \theta) K_n(x, \theta) d\mu_n(x) = 0$ , (Def. 6) (Prop. i, ii) en la que necesariamente el límite inferior de la integral es una Medida de Borel [7] [9].
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{s(n)P[|k(n)(T_n) - \theta| > k_2(n), \theta]\} = 0$ , (Prop. i, ii).

Consecuencia Inmediata 2.- Si, para todos los  $n$  suficientemente grandes,  $L_n(z, \theta)$  representa una función monótonicamente no decreciente sobre  $(z - \theta)$ , la consecuencia inmediata 1, es verdadera aun sin la propiedad iv.

Consecuencia inmediata 3.- Si, para todos los  $n$  suficientemente grandes,  $L_n(z, \theta) = s(n)$  para  $(z - \theta)h_2(n)$ , la consecuencia inmediata 1, es verdadera aun sin la propiedad iv.

### V. CONCLUSIONES

Existen condiciones necesarias y suficientes (Método de la máxima fiabilidad) para describir los objetos matemáticos involucrados en la propuesta de Jacob Wolfowitz y L. Weiss [7].

REFERENCIAS

- [1] Ibragimov, A. I. Maximum-Likelihood Method. In The Soviet Mathematical Encyclopaedia. Volume 6. Soviet Encyclopaedia Publishing House. 1990. Netherlands.
- [2] Ibragimov A. I.; Hasmisnki, R. Z. Statistical Estimation. Asymptotic Theory. Springer 1981. Berlin.
- [3] Resnick, S. I. Adventures in Stochastic Processes. Birkhäuser 2002. Boston.
- [4] Berberian, S. K. Measure and Integration. McMillan Co. 1966. New York.
- [5] Masani P. (Editor). Norbert Wiener: Collected Works. Volume III, Part II. Prediction and Filtering. The MIT Press. 1981. Cambridge, MA.
- [6] Seinfeld, J. H.; Lapidus, L. Mathematical Methods in Chemical Engineering. Volume 3. Process Modeling, Estimation and Identification. Prentice Hall International series. 1974. Englewood Cliffs, N. J.
- [7] Kiefe, J. (Editor). Jacob Wolfowitz. Selected Papers. Springer Verlag. 1980. Berlin.
- [8] Lebesgue, H. Leçons sur L'intégration et la reserche des fonctions primitives. Chelsea Publishing Company. 1973. New York.
- [9] É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, France: Gauthier-Villars, 1898.

# Teorema del Primo Cociente Minimal TPCM y Conjeturas de la Descomposición Primal Mixta.

Jaime William Flores Tecalco

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México,  
México.

[jaimewft@gmail.com](mailto:jaimewft@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0007-5597-7301>

**Resumen-** En este artículo se da a conocer el Teorema del Primo Cociente Minimal (TPCM) el cual establece una propiedad fundamental de las sumas primos impares  $p, q$  mayores o iguales a tres. Demuestra que su suma puede expresarse como el producto del menor divisor primo de la suma y un entero que cumpla la condición que sea mayor o igual a tres. Este teorema conecta la teoría aditiva y multiplicativa de números al relacionar la descomposición de sumas de primos con su factorización prima mínima. A diferencia de resultados clásicos como la conjetura de Goldbach o el postulado de Bertrand, el TPCM introduce una restricción de cota inferior y sensible al primalidad de los sumandos. A partir del TPCM se relacionan dos conjeturas, fuerte y débil, denominadas Conjeturas de la Descomposición Primal Mixta que estudian la representación de números pares  $k \geq 12$  y números primos. La conjetura fuerte revela limitaciones estructurales en números primos y la débil emerge como un problema accesible, abriendo nuevas direcciones en el estudio de las interacciones aditivo-multiplicativas de los primos.

**Palabras clave-** Sumas de primos, divisor minimal, teoría aditiva de números, factorización prima, conjetura de Goldbach, Teoría de números, conjetura de Goldbach, descomposición primal, no unicidad, números primos.

**Abstract-** This article presents the Minimal Prime Quotient Theorem (MPQT), which establishes a fundamental property of the sums of odd primes  $p$  and  $q$  greater than or equal to three. It shows that their sum can be expressed as the product of the smallest prime divisor of the sum and an integer that satisfies the condition that it is greater than or equal to three. This theorem connects additive and multiplicative number theory by relating the decomposition of prime sums with their minimal prime factorization. Unlike classical results such as Goldbach's conjecture or Bertrand's postulate, the MPQT introduces a lower bound restriction that is sensitive to the primality of the summands. Based on the MPQ, two conjectures, strong and weak, called the Mixed Primal Decomposition Conjectures, are related. These conjectures study the representation of even numbers  $k \geq 12$  and prime numbers. The strong conjecture reveals structural limitations in prime numbers and the weak conjecture emerges as an accessible problem, opening new directions in the study of additive-multiplicative interactions of primes.

**Keywords-** Prime sums, minimal divisor, additive number theory, prime factorization, Goldbach's conjecture, Number theory, Goldbach's conjecture, primal decomposition, non-uniqueness, prime numbers

**Mathematical Subject Classification:** 11A41. 11P32.

## I. TEOREMA DEL PRIMO COCIENTE MINIMAL TPCM

Dados dos números primos impares  $p$  y  $q$  ( $\text{con } p, q \geq 3$ ), su suma  $S = p + q$  puede expresarse como el producto de un número primo  $r$  y un entero  $k \geq 3$ , donde  $r$  es el menor primo posible que divide a  $S$ .

$$p + q = S = rk \quad (1)$$

## II. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL PRIMO COCIENTE MINIMAL TPCM

Def.1.- Un entero  $n$  es impar si se puede escribir como  $n = 2k + 1$ , donde  $k$  es un entero [1].

Def. 2.- Un entero  $m$  es par si se puede escribir como  $m = 2k$ , donde  $k$  es un entero [1].

Def. 3.- Un entero  $p \geq 2$  se llama número primo  $\mathbb{P}$  si sus únicos divisores positivos son 1 y  $p$ , es decir,  $p \in \mathbb{P} \leftrightarrow \{\exists d \in \mathbb{Z}^+ | \frac{d}{p} = 1\} = \{1, p\}$  [2].

Escolio 1.- El número 2 es un número primo, es decir,  $2 \in \mathbb{P}$  de donde  $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{Z}^+ | p \geq 2 \text{ y } \forall d \in \mathbb{Z}^+, (\frac{d}{p} \rightarrow d = 1 \vee d = p)\}$ . También es el mínimo del conjunto de los primos  $\mathbb{P}: \forall p \in \mathbb{P}, 2 \leq p \vee \forall p \in \mathbb{P}, p \text{ es par} \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+ | p = 2k$  [2].

Demostración de la Independencia del TPCM:

Sean  $p$  y  $q$  dos números impares, por la Def.1, se pueden escribir de la forma:

$$p = 2k_1 + 1 \quad (2)$$

$$q = 2k_2 + 1 \quad (3)$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  son enteros. Entonces la suma  $p + q$  se reescribe:

$$p + q = (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) \quad (4)$$

$$p + q = 2k_1 + 2k_2 + 2 \quad (5)$$

$$p + q = 2(k_1 + k_2 + 1) \quad (6)$$

Sea  $k = k_1 + k_2 + 1$ . Como  $k_1$  y  $k_2$  son enteros entonces  $k$  también es entero, por lo tanto

$$p + q = 2k \quad (7)$$

Es decir, la suma  $S = p + q$  es un número par  $S = p + q \equiv 0 \pmod{2}$  sí y solo si ambos primos (2) y (3) son impares. Es decir: [1][2].

$$p \equiv 1 \pmod{2}, q \equiv 1 \pmod{2} \rightarrow p + q \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2} \quad (8)$$

Si se supone la existencia de un número par  $m \geq 2$  talque el menor primo  $r$  que lo divide no es 2, es decir,  $r > 2$  entonces como  $m$  es par (Def. 2), 2 divide a  $m$ ;  $m = 2k$  [3].

Pero por hipótesis,  $r$  es el menor primo que divide a  $m$  y  $r \neq 2$ . Por el Teorema Fundamental de la Aritmética [4], todo número entero mayor o igual a dos tiene una factorización única en primos [3], y el menor primo en esa factorización debe ser el más pequeño posible. Como 2 es primo y divide a  $m$ , debe aparecer en su factorización prima [3]. Pero si  $r$  es el menor primo divisor de  $m$ , entonces  $r \leq 2$ .

Como  $r \neq 2$  (por hipótesis), la única posibilidad sería  $r < 2$ ; pero el menor primo es 2, lo cual es una contradicción. Es decir,  $m \equiv 0 \pmod{2} \wedge m \equiv 0 \pmod{r} \rightarrow m \equiv 0 \pmod{2r}$  pero 2 ya es el mínimo posible para pares.

Por lo tanto, el menor primo que divide a cualquier número par mayor o igual a 2 es necesariamente  $r = 2$  [9].

Entonces  $S$  puede escribirse como:

$$S = 2k \quad (9)$$

Donde  $k = \frac{S}{2}$ .

Entonces la combinación más pequeña de dos primos impares es  $3+3=6$ , por lo tanto: [9]

$$k = \frac{S}{2} \geq 3 \quad (10)$$

Con lo cual se demuestra:

$$p + q = S = rk; k \geq 3 \quad \blacksquare \quad (11)$$

Demostración de la Consistencia del TPCM:

$\forall p, q$  primos  $\geq 3$  su suma  $S = p + q$  se reescribe como  $S = rk$  donde  $r = \text{mín}\{\text{primo que divide a } S\}; k \geq 3$  es consistente porque no introduce a contradicciones de paridad  $S = p + q$  implicando a  $r$  y ni contradicciones de una cota mínima  $k \rightarrow S \geq 6 \therefore k \geq 3$ .

Por el operador Booleano lógico AND ( $x$ ) [8] de la tabla 1 se puede definir  $S = p + q$  como A,  $r$  como B y  $K$  como C. Si  $A \rightarrow B \rightarrow C$  entonces cumple:

Tabla 1. Operador AND

A	B	C	A	B	C	X
0	0	0	F	F	F	0
0	0	1	F	F	V	0
0	1	0	F	V	F	0
0	1	1	F	V	V	0
1	0	0	V	F	F	0
1	0	1	V	F	V	0
1	1	0	V	V	F	0
1	1	1	V	V	V	1

Y, por tanto, se cumple su consistencia  $\blacksquare$

Demostración de la no trivialidad del TPCM: Observando la consistencia del TPCM se demuestra su no trivialidad por contradicción utilizando dos casos.

Caso 1:  $p = 2$  (Primo par).

Sea  $p = 2 \wedge q = 3$  entonces  $S = p + q = 5$ . Si  $S = rk \rightarrow r = 5 \wedge k = 1$ . Por lo tanto contradice a  $k \geq 3$  debido a que  $p$  es par  $\blacksquare$

Caso:2:  $\forall p, q$  no primos.

Sea  $p = 9 \wedge q = 15$ , ambos compuestos impares entonces  $S = p + q = 24$ . Si  $S = rk \rightarrow r = 2 \wedge k = 12$ , en este caso  $k \geq 3$  se cumple, pero no como generalidad sino como caso particular ya que, si los valores cambian, por ejemplo, sea  $p = 1 \wedge q = 1$ , entonces  $S = p + q = 2$ . Si  $S = rk \rightarrow r = 2 \wedge k = 1$ , en este caso  $k$  no cumple con la restricción y contradice a  $k \geq 3$   $\blacksquare$

### III. APLICACIÓN

Ejemplo 1.- Sean los números primos impares  $p = 5 \wedge q = 7$  entonces  $S = p + q = 12$ . El número 12 es divisible por 2, el menor primo posible, entonces si  $S = rk \rightarrow r = 2 \wedge k = 6$  de donde  $r$  es el primo minimal y  $k$  entero  $\geq 3$ .

Ejemplo 2.- Sean los números primos impares  $p = 11 \wedge q = 13$  entonces  $S = p + q = 24$ . El número 24 es divisible por 2, el menor primo posible, entonces si  $S = rk \rightarrow r = 2 \wedge k = 12$  de donde  $r$  es el primo minimal y  $k$  entero  $\geq 3$ .

### IV. CONJETURAS DE LA DESCOMPOSICIÓN PRIMAL MIXTA

En teoría de números, las representaciones de números pares como combinaciones de primos han sido un tema central desde la famosa Conjetura de Goldbach (1742) [10], que propone que todo número par mayor que 2 puede expresarse como suma de dos primos.

Por otro lado, las Conjeturas de Descomposición Primal Mixta surgen como una expansión natural del TPCM, llevando sus ideas a un terreno más general. Estas conjeturas no se limitan a sumas directas de primos impares, sino que exploran descomponer números pares  $k \geq 12$  en formas que combinan sumas y productos de primos.

**Conjetura 1.-** Conjetura Fuerte de la Descomposición Primal Mixta: Sea  $k \in 2Z^+$  entonces  $\exists (p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{P} \wedge r_1, r_2 \in \mathbb{P} \cup 1$  tal que  $k = r_1(p_1 + q_1) \wedge k = r_2(p_2 + q_2)$ . Con representaciones distintas  $(r_1, p_1, q_1) \neq (r_2, p_2, q_2)$  y al menos  $r_1 \vee r_2 \in \mathbb{P}$ .

Los resultados parciales de la Conjetura 1 son:

1.- Validez para  $k \geq 12$ :

Sea  $k = 12$  se tiene:

$$12 = 2(3 + 3); r = 2 \text{ (primo)} \quad (12)$$

$$12 = 1(5 + 7); r = 1 \quad (13)$$

Sea  $k = 18$  se tiene:

$$18 = 3(3 + 3); r = 3 \text{ (primo)} \quad (14)$$

$$18 = 1(7 + 11); r = 1 \quad (15)$$

Se nota que otra alternativa es  $18 = 2(5 + 4)$  pero no es válida debido a que 4 no es primo, pero aun así 18 se puede reescribir de al menos dos formas válidas.

2.- Excepciones confirmadas:

Sea  $k = 22$  se tienen dos formas válidas:

$$22 = 1(11 + 11); r = 1 \quad (16)$$

$$22 = 1(5 + 17); r = 1 \quad (17) \qquad 18 = 3(3 + 3); r = 3 \text{ (primo)} \quad (29)$$

Pero no se tiene ninguna forma con r primo, pues:

$$18 = 1(7 + 11); r = 1 \quad (30)$$

$$22 = 2(3 + 8); 8 \text{ no es primo} \quad (18)$$

Sea  $k = 24$  se tiene:

$$22 = 11(1 + 1); 1 \text{ no es primo} \quad (19)$$

$$24 = 2(5 + 7); r = 7 \text{ (primo)} \quad (31)$$

Sea  $k = 34$  se tienen dos formas válidas:

$$24 = 1(11 + 13); r = 1 \quad (32)$$

$$34 = 1(17 + 17); r = 1 \quad (20)$$

2.- Excepciones de la versión fuerte:

$$34 = 1(3 + 31); r = 1 \quad (21)$$

Sea  $k = 22$  se tiene:

$$22 = 1(11 + 11); r = 1 \quad (33)$$

Pero no se tiene ninguna forma con r primo, pues:

$$22 = 1(5 + 17); r = 1 \quad (34)$$

$$34 = 2(7 + 10); 10 \text{ no es primo} \quad (22)$$

Ahora ambas válidas.

Sea  $k = 34$  se tiene:

Se nota que  $\frac{k}{2}$  no es primo y  $\frac{k}{r}$  no es par para ningún primo  $r \geq 3$ .

$$34 = 1(17 + 17); r = 1 \quad (35)$$

Por ejemplo, sea  $k = 38$  entonces  $\frac{38}{2} = 19$  que es un número primo, pero  $19 = p + q$  solo tiene  $(2 + 17)$  por lo cual  $38 = 2(2 + 17)$  lo que implica una única forma con r primo, pero se necesitan al menos dos.

$$34 = 1(3 + 31); r = 1 \quad (36)$$

3.- Demostración parcial para k no excepcionales:

Ahora ambas válidas.

Sea  $k = 38$  se tiene:

Si k es el doble de un primo s

$$38 = 1(19 + 19); r = 1 \quad (37)$$

$$k = 2s \quad (23)$$

$$38 = 1(7 + 31); r = 1 \quad (38)$$

Por Goldbach [5] se tiene que

$$s = p + q; s \neq 2 \quad (24)$$

Ahora ambas válidas.

3.- Demostración parcial

Donde  $k = 2(p + q)$  con  $r = 2$  primo. Además, análogamente se obtiene:

Por la conjetura de Goldbach [5][10], todo par  $k \geq 4$  puede escribirse como  $k = p + q$  lo que equivale a  $k = 1(p + q)$ .

$$k = 1(p^1 + q^1) \blacksquare \quad (25)$$

Para  $k \geq 12$  no se encontraron contra ejemplos debido a que Goldbach garantiza al menos una descomposición [1][5][10].

Si k es divisible por un primo  $r \geq 3$  entonces se obtiene:

Para números pares grandes, suele haber múltiples pares  $(p, q)[1]$  que cumplen  $k = p + q$ .

$$k = rs; s \geq 4 \quad (26)$$

## V. CONCLUSIÓN

Si s es par, entonces por Goldbach [5][10] se tiene  $s = p + q \blacksquare$

La propiedad del Primo Cociente Minimal establece que la suma de dos números primos impares, mayores o iguales a 3, siempre puede expresarse como el producto del menor primo que la divide, siempre el 2, y un entero mayor o igual que 3.

**Conjetura 2.-** Conjetura Débil de la Descomposición Primal Mixta: Sea  $k \in 2\mathbb{Z}^+$ ;  $k \geq 12$  entonces  $\exists (r_1, p_1, q_1), (r_2, p_2, q_2) \in (\mathbb{P} \cup 1) \times \mathbb{P} \times \mathbb{P}$  tal que  $k = r_1(p_1 + q_1)$  y  $k = r_2(p_2 + q_2)$ . Teniendo representaciones distintas  $(r_1, p_1, q_1) \neq (r_2, p_2, q_2)$  con  $r_1, r_2 \in (\mathbb{P} \cup 1)$  permitiendo  $r_1 = r_2 = 1$  y no exigiendo que  $r \in \mathbb{P}$  pero si que al menos un elemento de las ternas sea  $(r_1 \neq r_2) \vee (p_1 \neq p_2) \vee (q_1 \neq q_2)$ .

En este artículo se pudo demostrar el TPCM, ya que combina propiedades aditivas (suma de primos) y multiplicativas (factorización con restricciones en k). Depende estrictamente de que  $p, q$  sean primos impares  $\geq 3$ .

Los resultados parciales de la Conjetura 2 son:

1.- Validez para  $k \geq 12$ :

Sea  $k = 12$  se tiene:

$$12 = 2(3 + 3); r = 2 \text{ (primo)} \quad (27)$$

$$12 = 1(5 + 7); r = 1 \quad (28)$$

Sea  $k = 18$  se tiene:

Mientras la mayoría de resultados sobre primos se centran en su distribución (ej. Teorema de los Números Primos [4] [5]) o en sumas (ej. Goldbach [1] [5]), el TPCM vincula la suma de primos con su estructura multiplicativa mínima  $S = 2k$ . Además posee una cota inferior que garantiza  $k \geq 3$ , una propiedad que no se obtiene de teoremas estándar [Burton, D.M.].

El TPCM puede aplicarse en diversos contextos de la teoría de números, tanto en problemas teóricos como computacionales [6]. Por ejemplo, en la generación y verificación de números pares con restricciones, acotación en problemas de divisibilidad, optimización en algoritmos de

búsqueda de primos, análisis de estructuras multiplicativas en sumas de primos o construcción de secuencias especiales.

La conjetura fuerte de la descomposición primal mixta es cierta para la mayoría de  $k \geq 12$  pero falla para números como 22, 34, 38, 46, etc.

donde no existe ninguna descomposición con  $r$  primo además de las de  $r = 1$ .

La conjetura débil de la descomposición primal mixta es cierta (aparentemente) para todo  $k \geq 12$ .

Es una formulación singular en su enfoque mixto (combinando suma y multiplicación de primos) enfatizando la no unicidad.

Mientras que la Conjetura de Goldbach (suma de dos primos) [5][10] es bien conocida, esta formulación mixta  $k = r(p + q)$  no aparece en la literatura clásica.

La versión fuerte revela limitaciones inesperadas (excepciones como  $k = 22$ ), mientras que la débil parece cierta, pero depende de propiedades no demostradas de Goldbach [5][10].

El Teorema del Primo Cociente Minimal (TPCM) y las Conjeturas de Descomposición Primal Mixta guardan una relación de fundamentación y generalización en el estudio de las representaciones de números pares mediante sumas y productos de números primos. Mientras el TPCM establece un resultado concreto y demostrado sobre la estructura de las sumas de primos impares, las conjeturas proponen una ampliación significativa de este concepto, explorando patrones más complejos y generales en la descomposición de números pares.

La conexión entre ambos conceptos se manifiesta claramente cuando se analizan ejemplos concretos. Por ejemplo, el número 12 en el TPCM (1) se expresa como  $2(3+3)$ , donde 12 es la suma directa de los primos 3 y 3. Las conjeturas, sin embargo, añaden otra perspectiva al identificar una representación alternativa:  $1(5+7)$ . Este tipo de generalización no es una consecuencia inmediata del TPCM, sino que requiere múltiples formas de descomposición.

Las excepciones encontradas en las conjeturas, como los números 22 y 34 (19)(21), que no cumplen la versión fuerte por carecer de representaciones con  $r \in \mathbb{P}$ , subrayan la independencia relativa de estas conjeturas respecto al TPCM. Estas limitaciones muestran que, aunque el TPCM proporciona un punto de partida valioso, las conjeturas introducen complejidades adicionales que van más allá de su alcance original.

#### REFERENCIAS

- [1] Apostol, T.M. (1976) *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: Springer.
- [2] Niven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery, H.L. (1991) *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5th edn. New York: Wiley.
- [3] Bach, E. and Shallit, J. (1996) *Algorithmic Number Theory*. Vol. 1. Cambridge: MIT Press.
- [4] Hardy, G.H. and Wright, E.M. (2008) *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6th edn. Oxford: Oxford University Press.
- [5] Nathanson, M.B. (1996) *Additive Number Theory: The Classical Bases*. New York: Springer.
- [6] Crandall, R. and Pomerance, C. (2005) *Prime Numbers: A Computational Perspective*. 2nd edn. New York: Springer.
- [7] Ribenboim, P. (2004) *The Little Book of Bigger Primes*. 2nd edn. New York: Springer.
- [8] Huth, M. and Ryan, M. (2004) *Logic in Computer Science*. 2nd edn. Cambridge: Cambridge University Press.
- [9] Burton, D.M. (2011). *Elementary Number Theory*. 7th ed. New York: McGraw-Hill.
- [10] Wang, Y. (2002) *Goldbach Conjecture*. Singapore: World Scientific.
- [11] Rosen, K.H. (2011). *Elementary Number Theory and Its Applications* (6th ed.). Boston: Pearson.

# Teorema para el cálculo general de áreas de Lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral.

Jonathan Josue Ornelas Tapia

Alumno de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo Xalpa 180  
Colonia Reynosa.

[ornelas.tapia.jonathan@gmail.com](mailto:ornelas.tapia.jonathan@gmail.com) <https://orcid.org/0009-0004-6497-2017>

**Resumen-** En este trabajo se construye un algoritmo para el cálculo de áreas de lúnulas utilizando herramientas de la geometría integral. A partir de este desarrollo, se formula un teorema asociado cuya demostración se presenta en detalle. Se establece la unicidad del algoritmo propuesto, lo que garantiza su consistencia y aplicabilidad en contextos geométricos específicos. Como complemento, se incluyen referencias históricas relevantes que contextualizan el problema y su tratamiento a lo largo del desarrollo matemático.

**Palabras Clave-** algoritmo, cálculo de áreas, demostración, lúnulas, teorema.

**Abstract-** This work presents the construction of an algorithm for calculating the areas of lunes using tools from integral geometry. Based on this development, a related theorem is formulated, and its proof is provided in detail. The uniqueness of the proposed algorithm is established, ensuring its consistency and applicability in specific geometric contexts. Additionally, historical references are included to contextualize the problem and its mathematical treatment over time.

**Keywords-** algorithm, area calculation, lunes, proof, theorem.  
**Mathematical Subject Classification:** 65D18.

## I. INTRODUCCIÓN

Una lúnula es una región plana delimitada por dos arcos de circunferencia que se intersectan en un par de puntos, formando una figura con simetría curvilínea que recuerda la forma de una luna creciente como se muestra en la figura 1.

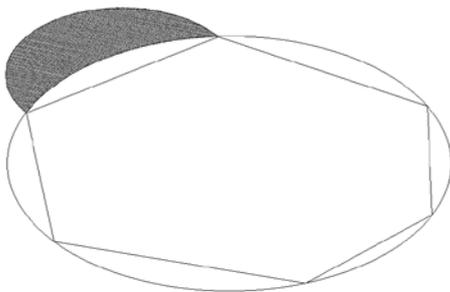


Fig. 1. Lúnula.

En la actualidad contamos con algunos métodos para resolver cuadraturas de lúnulas como lo hizo Hipócrates [8], Ferdinand Von Lidermann [8], Eudemo de Rodas [8], etc., sin embargo, estos métodos al ser en su totalidad cuadrados con

regla y compás por las limitantes matemáticas de aquellos años requieren de muchos pasos para llevarlos a cabo, y al ser puramente geométrico, llega a ser poco certero sino se cuenta con el conocimiento necesario del uso de los instrumentos.

El siguiente algoritmo utiliza herramientas del cálculo diferencial e integral, geometría analítica, propiedades geométricas, geometría integral, etc., para establecer una manera de calcular su área abogando por la optimización e innovación.

## II. PROPOSICIÓN

Si se diseña un algoritmo de la forma:

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} F_k(x) dx \right] \quad (1)$$

Este algoritmo cumple con las propiedades de existencia, unicidad y consistencia, y se formula a partir de herramientas propias de las matemáticas modernas. Su carácter abstracto permite su generalización teórica y su implementación computacional, lo que lo distingue de los métodos geométricos clásicos atribuidos a Hipócrates [8] y Wallenius [8].

## III. ALGUNAS PROPIEDADES

A continuación, se enuncian ciertas propiedades estructurales que constituirán la base para el desarrollo del algoritmo, así como para establecer la consistencia interna y la unicidad del enunciado teorematizado.

Propiedad (Prop.) 1.- Aditividad respecto al intervalo de integración [5]:

Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y  $c$  está entre  $a$  y  $b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

Prop. 2.- Linealidad en sumas y constantes [5]:

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones integrables y  $a, b$  son constantes:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \quad (3)$$

Prop. 3.- Determinación de puntos de intersección mediante igualdad funcional [6]:

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones reales definidas en un mismo dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Los puntos de intersección de sus gráficas son los pares ordenados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que:

$$f(x) = g(x) \quad (4)$$

Es decir, los valores de  $x$  para los cuales ambas funciones toman el mismo valor. Para encontrarlos, se resuelve la ecuación:

$$f(x) - g(x) = 0 \quad (5)$$

Y los puntos de intersección son de la forma  $(x, f(x)) = (x, g(x))$  para cada solución  $x$ .

Prop. 4.- Fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano [6]: Sean  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  dos puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ .

La distancia  $d$  entre ellos está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (6)$$

Prop. 5.- Fórmula de la pendiente entre dos puntos en el plano cartesiano [6]: Sea una recta que pasa por los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  con  $x_1 \neq x_2$ .

La pendiente  $m$  de dicha recta se calcula como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7)$$

Prop. 6.- Principio de Área entre dos funciones [7]: Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y supóngase que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces, el área de la región comprendida entre las gráficas de  $f$  y  $g$  en dicho intervalo se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (8)$$

Prop. 7.- Punto Medio entre Dos Puntos [7]: Dado un par de puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  en el plano cartesiano, el punto medio del segmento que los une es el punto  $M$  cuyas coordenadas se obtienen promediando las coordenadas correspondientes:

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (9)$$

Prop. 8.- Recta Normal a una Curva en un Punto [7]: Sea una función  $f(x)$  derivable en el punto  $x_0$  y sea  $m_t = f'(x_0)$  la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $(x_0, f(x_0))$ .

Entonces, la recta normal en ese punto es la recta perpendicular a la tangente, y su pendiente  $m_n$  está dada por:

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (10)$$

Siempre que  $f'(x_0) \neq 0$ . La ecuación de la recta normal es entonces:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) \quad (11)$$

#### IV. TEOREMA [1]

Sea  $P$  un polígono tal que existe una circunferencia circunscrita a  $P$ .  $\forall$  lado  $l \in P$ , si se traza una semicircunferencia cuyo diámetro es  $l$ , entonces el área de la lúnula formada por dicha semicircunferencia y la circunferencia circunscrita se calcula como (12):

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] - 2 \left[ \int_{\liminf}^{\limsup} c(x) dx - \int_{P_m}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup}^{P_m} l_n(x) dx - \int_{\liminf} c(x) dx \right] \quad (12)$$

Reduciendo (12) se obtiene (13):

$$A_L = \frac{\pi[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \int_{\limsup}^{x_2} c(x) dx - \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup}^{\frac{x_1+x_2}{2}} l_n(x) dx \right] \quad (13)$$

Y de (13) denotando la expresión en su notación funcional donde  $a_k, b_k$  son los límites de integración de las funciones  $F_k(x)$  se obtiene (14):

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} F_k(x) dx \right] \quad (14)$$

A continuación, se presentan una serie de resultados y procedimientos basados en el desarrollo propuesto en [1], el cual servirá como marco de referencia para esta sección.

Sea  $P$  un polígono que cumple con la propiedad de ser circunscrible. Selecciono una arista de  $P$ , la cual denoto como  $l(x)$ , donde los vértices correspondientes son  $P_1, P_2$ . Trazo una circunferencia  $C(x)$  tal que circunscribe completamente a  $P$ . Fig. 2

Posteriormente trazo una media circunferencia  $A(x)$ , con centro en el punto medio de mi lado seleccionado y siendo su diámetro el segmento completo. Fig. 3

El área de interés para este algoritmo será la superficie comprendida entre los dos arcos de las circunferencias  $C(x), A(x)$ , siendo esta el área de la lúnula  $A_L$ . Fig. 4

Utilizando la propiedad 6 de área entre dos funciones calculo  $A_L$  como (15). Fig. 5

$$A_L = \int_{P_1}^{P_2} A(x) - l(x) dx - \int_{P_1}^{P_2} C(x) - l(x) dx = \int_{P_1}^{P_2} A(x) - C(x) dx \quad (15)$$

No obstante, no se cumple con la característica de ser función para  $C(x)$  y  $A(x)$  al ser espacios geométricos; utilizando el cálculo del área de una media circunferencia se tiene que el área de  $A(x)$  se representa como (16):

$$\int_{P_1}^{P_2} A(x) dx = \frac{1}{8}\pi(P_2 - P_1)^2 \quad (16)$$

Donde  $(P_2 - P_1)$  es la distancia entre dos puntos, utilizando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos de la propiedad 4 se obtiene (17) y (18):

$$\int_{P_1}^{P_2} A(x) dx = \frac{1}{8}\pi \left( \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right)^2 \quad (17)$$

$$\int_{P_1}^{P_2} A(x) dx = \frac{1}{8}\pi[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \quad (18)$$

Siendo así:

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] - \int_{P_1}^{P_2} C(x) dx \quad (19)$$

Trazo todo en un plano que contenga  $C(x)$ ,  $l(x)$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . Fig. 7

Utilizando la propiedad 6, el principio de área entre dos funciones se calcula el área bajo la curva de  $C(x)$  en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  limitada por  $l(x)$ , se observa que la superficie de interés es un arco de circunferencia limitada por una cuerda la cual al ser partida desde su punto medio y de forma perpendicular ambas áreas son simétricas. Fig. 8.

Se observa que al encontrar cualquiera una de las dos áreas y obteniendo su doble, se obtendría el área de interés. Fig. 9.

Trabajo con la superficie superior y su área se obtiene por medio de la propiedad 6 el principio del área entre dos funciones teniendo así (20):

$$\int_{\text{límite inferior}}^{\text{límite superior}} C(x) - l(x) dx \quad (20)$$

Para ello necesito calcular ambos límites, utilizando segmentos auxiliares trazo de los vértices de intersección de  $C(x)$  y  $l(x)$  dos rectas perpendiculares con dirección a la

circunferencia de tal manera que ambas rectas se crucen en un punto formando un triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el segmento  $l(x)$ , también se traza un segmento perpendicular que corte al  $P_m$  de la hipotenusa formada y al cateto opuesto a esta. Fig. 10.

Los vértices  $P_1, P_2$  los denoto con su forma coordenada, siendo así:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \quad (21)$$

Utilizo la propiedad 5 para obtener así la pendiente de  $l(x)$ :

$$m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (22)$$

Obteniendo así la pendiente de la recta normal:

$$(m_T)^{-1} = m_n(x) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (23)$$

Obteniendo así  $l(x)$ :

$$(y - y_n) = m_T(x - x_n), n = \{1, 2\} \quad (24)$$

$$l(x) = m_T(x - x_n) + y_n \quad (25)$$

Utilizando la propiedad 8, obteniendo así la recta normal  $l_n(x)$ :

$$l_n(x) = (m_T)^{-1}(x - x_n) + y_n \quad (26)$$

Con los nuevos trazos auxiliares Fig. 11 y la función  $l_n(x)$  Fig. 12 formo dos puntos que servirán como límites para posteriormente integrar mis funciones, los cuales nombraré *límite inferior*, *límite superior*.

Utilizando la propiedad 6, el principio de área entre dos funciones calculo la superficie limitada entre  $C(x)$  y  $l(x)$  Fig. 17 seleccionada partiendo las funciones y seleccionando sus límites de integración nuevos, obteniendo así (27):

$$\int_{\text{límite inferior}}^{x_2} C(x) dx - \int_{\text{límite superior}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\text{límite superior}}^{P_m} l_n(x) dx - \int_{\text{límite inferior}}^{P_m} C(x) dx \quad (27)$$

Utilizo la propiedad 7 para obtener su punto medio, teniendo así (28):

$$P_m = (x, y) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (28)$$

Utilizo la propiedad 3 para obtener las coordenadas del límite superior, teniendo así (29):

$$l_n(x) = C(x) \quad (29)$$

Y siendo las coordenadas del límite superior (30).

$$\text{límite superior} = (x, y) \quad (30)$$

Para obtener las coordenadas del límite inferior utilizo el mismo proceso que utilicé para la obtención del límite superior, para ello nombro una nueva función  $l_{aux}(x)$  que será el segmento auxiliar que corta al  $P_m$  de la hipotenusa  $l(x)$  formada y al cateto puesto a esta. Fig.18

Utilizo la propiedad 3 para obtener las coordenadas del límite inferior utilizo la fórmula de intersección entre dos funciones, teniendo así (31):

$$l_{aux}(x) = C(x) \quad (31)$$

Obteniendo las coordenadas del límite superior:

$$\text{límite inferior} = (x, y) \quad (32)$$

Finalmente, de (15) y utilizando las expresiones obtenidas en (18) y (27) junto con los límites obtenidos en (21), (28), (30) y (32).

El área de la Lúnula será (33):

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] - 2 \left[ \int_{\liminf_{P_m}}^{x_2} C(x) dx - \int_{\limsup_{P_m}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup} l_n(x) dx - \int_{\liminf} C(x) dx \right] \quad (33)$$

Reduciendo (33) se obtiene (34):

$$A_L = \frac{\pi[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \int_{\limsup}^{x_2} C(x) dx - \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup} l_n(x) dx \right] \quad (34)$$

Y de (34) denotando la expresión en su notación funcional donde  $a_k, b_k$  son los límites de integración de las funciones  $F_k(x)$  se obtiene (35) la cual coincide exactamente con la proposición (1):

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} F_k(x) dx \right] \quad (35)$$

La consistencia del algoritmo queda garantizada mediante la verificación rigurosa de las propiedades estructurales 1, 2, 3 y 6, las cuales se detallan a continuación:

Las funciones  $F_k(x)$  son continuas en los intervalos  $[a_k, b_k]$ , los operadores involucrados preservan la linealidad y la estabilidad del sistema y la expresión obtenida en (35) respeta las condiciones de simetría y estructura derivadas del modelo propuesto.

Estas propiedades aseguran que el algoritmo se comporta de manera coherente con las bases teóricas del sistema, sin introducir contradicciones internas ni desviaciones en la lógica estructural del modelo.

Por lo que el área de la lúnula se calcula como (1):

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[ \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} F_k(x) dx \right] \quad \blacksquare$$

Escolio 1.- A fin de reforzar la comprensión geométrica de los pasos llevados a cabo en la demostración, se presentan a continuación una serie de figuras que ilustran las construcciones realizadas. Cada una de ellas resalta elementos clave como la posición relativa de los vértices, la simetría del sistema, y el uso de circunferencias como contorno de referencia.

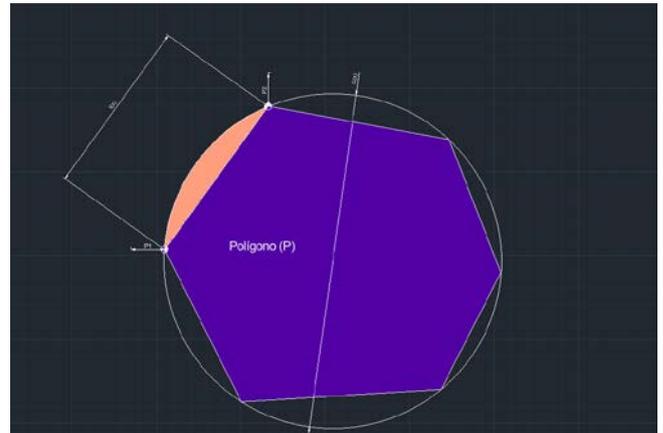


Fig. 2 Polígono (P) circunscrito.

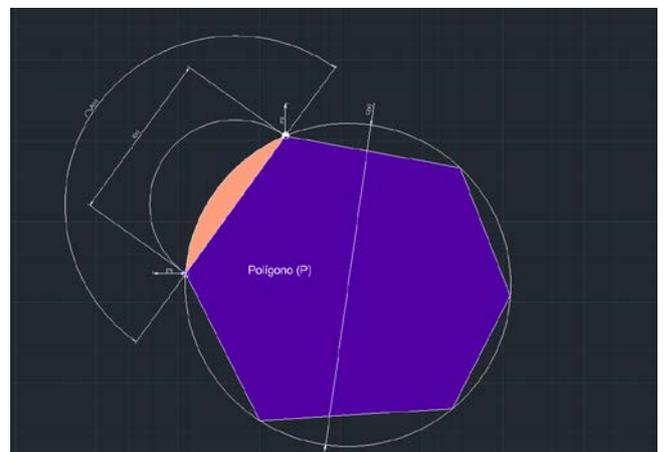


Fig. 3 Polígono (P) circunscrito con media circunferencia.

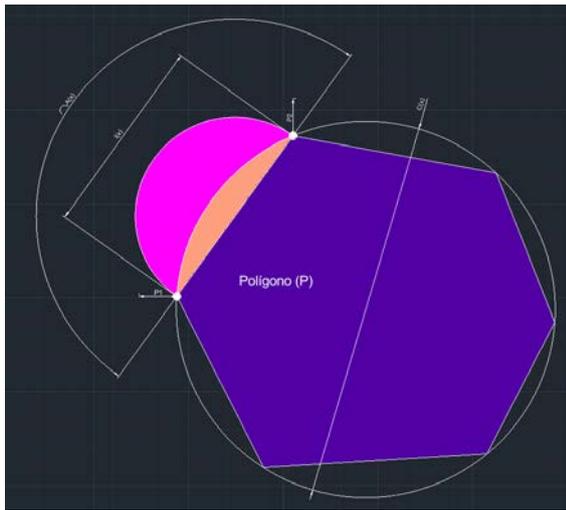


Fig. 4 Polígono (P) circunscrito con media circunferencia achurada

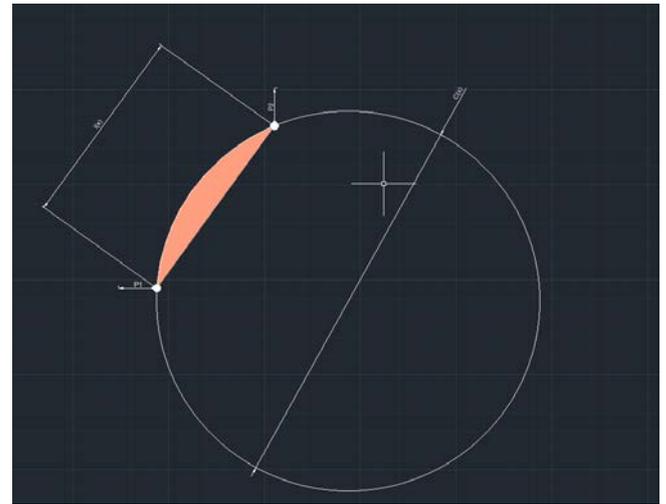


Fig. 7 Plano que contiene a  $C(x), l(x), P_1, P_2$ .

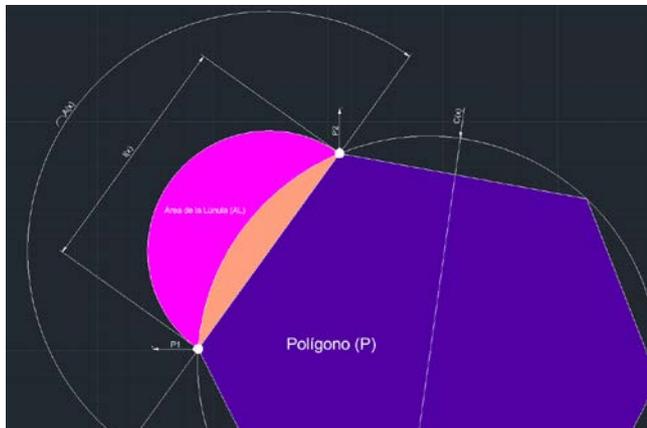


Fig. 5 Polígono (P) circunscrito con media circunferencia y área de la lúnula achurada en magenta.

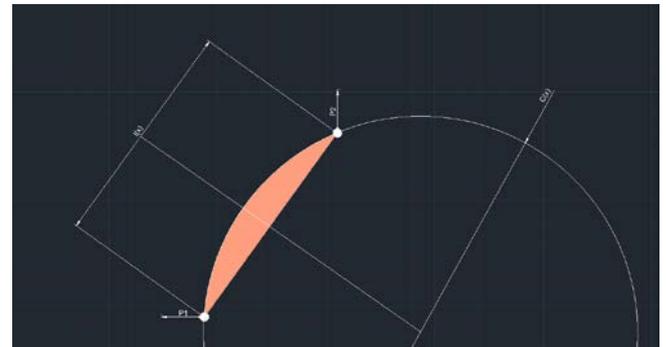


Fig. 8 Plano que contiene a  $C(x)$  con segmento que corta a  $l(x)$  en dos de forma perpendicular.

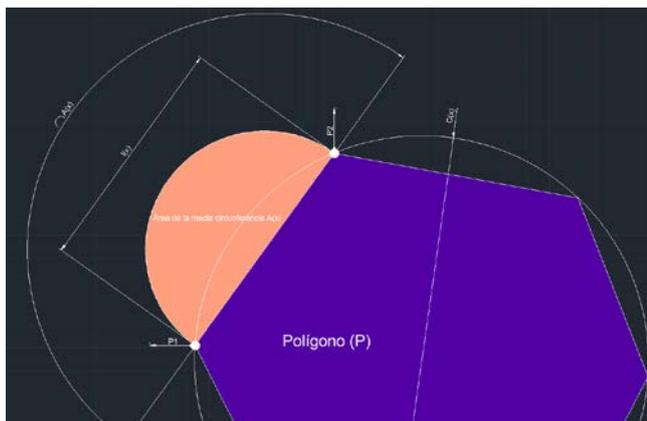


Fig. 6 Polígono (P) circunscrito con  $C(x)$  Achurada.

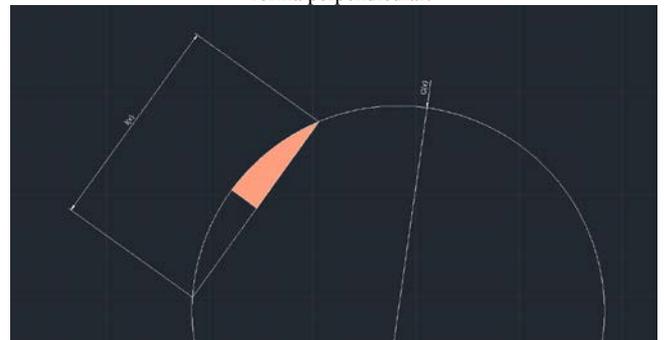


Fig. 9 Plano que contiene a  $C(x)$  partido simétricamente en dos.

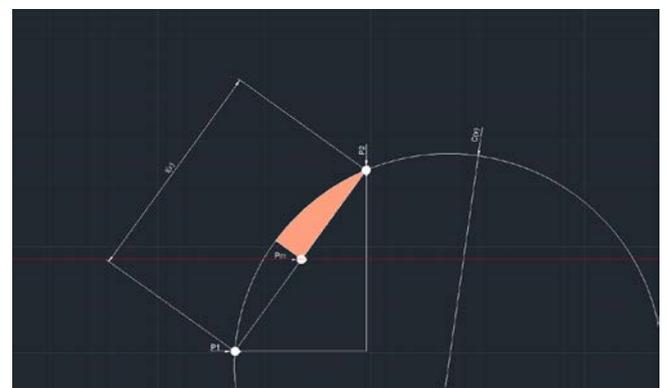


Fig. 11 Función  $l(x)$  con líneas auxiliares para formar triángulo rectángulo marcando su punto medio.

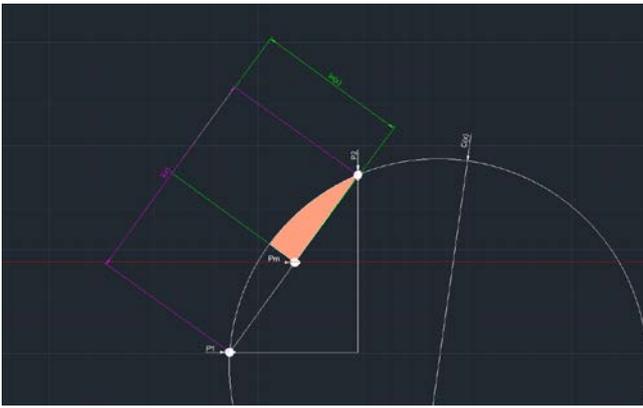


Fig. 12 Función  $l_n(x)$ .

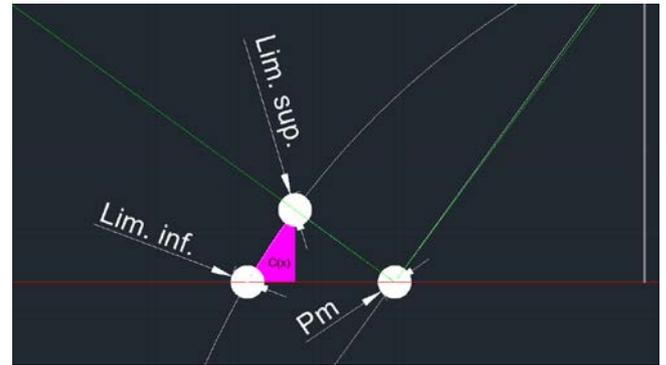


Fig. 16 Área de  $C(x)$  con los límites de integración *límite inferior* y *límite superior*.

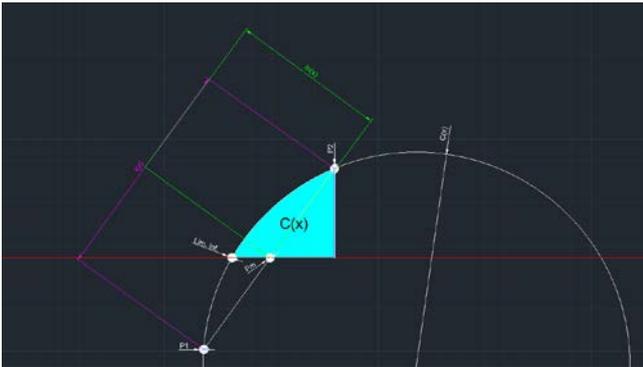


Fig. 13 Área de  $C(x)$  con los límites de integración *límite inferior* y  $P_2$ .

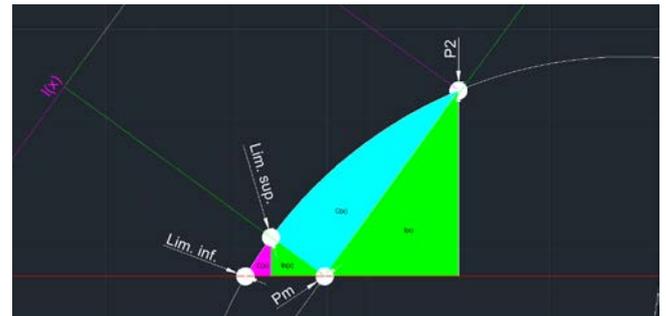


Fig. 17 Representación visual de la superficie limitada entre  $C(x)$  y  $l(x)$ .

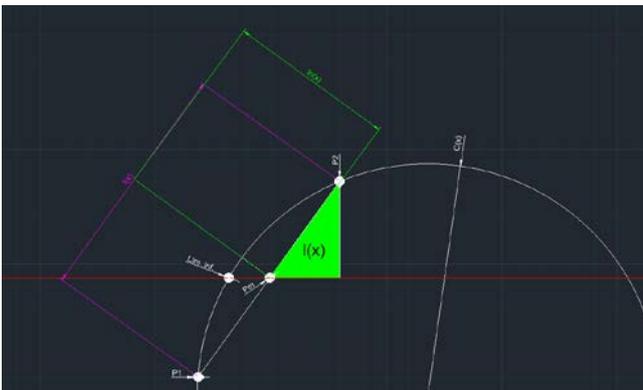


Fig. 14 Área de  $l(x)$  con los límites de integración  $p_m$  y  $P_2$ .



Fig. 18  $C(x)$  y  $l_{aux}(x)$ .



Fig. 15 Área de  $l_n(x)$  con los límites de integración *límite superior* y  $P_m$ .

V. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO GENERAL DE ÁREAS DE LÚNULAS CON ARCO EXTERIOR IGUAL A UNA SEMICIRCUNFERENCIA MEDIANTE GEOMETRÍA INTEGRAL

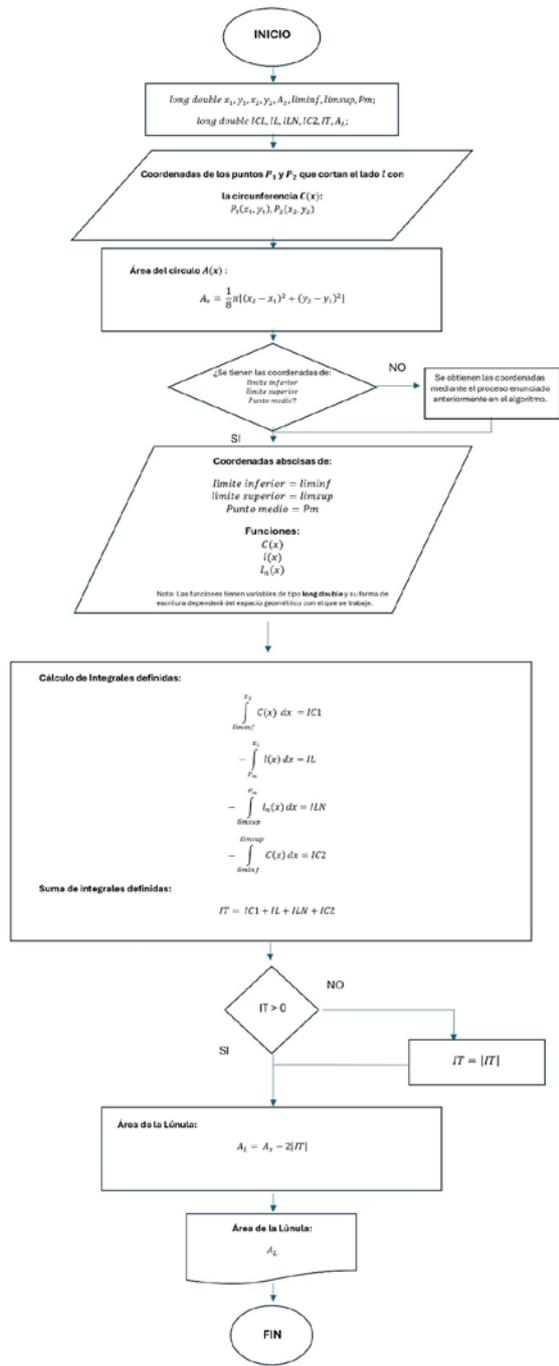


Fig. 19 Diagrama de Flujo del Algoritmo.

VI. PROBLEMA DE LA LÚNULA DE HIPÓCRATES

A continuación, se prueba el algoritmo en uno de los problemas clásicos de Lúnulas de Hipócrates [1].

Tenemos dos círculos y la lúnula que se forma entre ellos ¿Se puede construir con regla y compás un cuadrado que tenga exactamente la misma área que la Lúnula Fig. 20

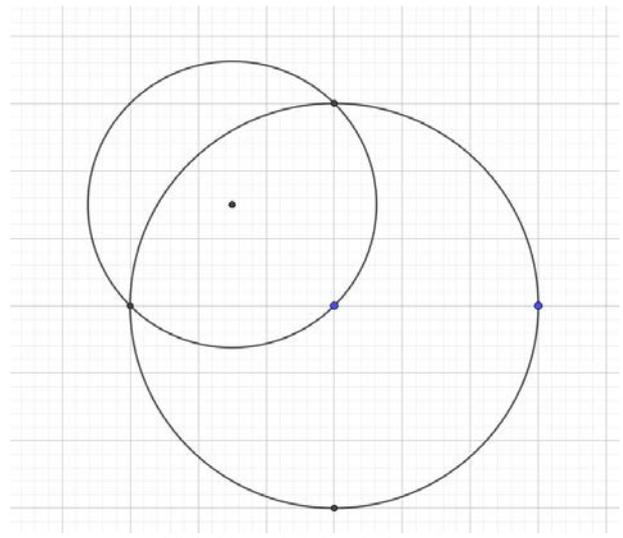


Fig. 20 Problema de la lúnula de Hipócrates.

Este problema fue demostrado y se llegó a una conclusión tal que se demostró que el área de la Lúnula es exactamente la misma al triángulo que se forma dentro gracias a las siguientes líneas auxiliares. Fig. 21

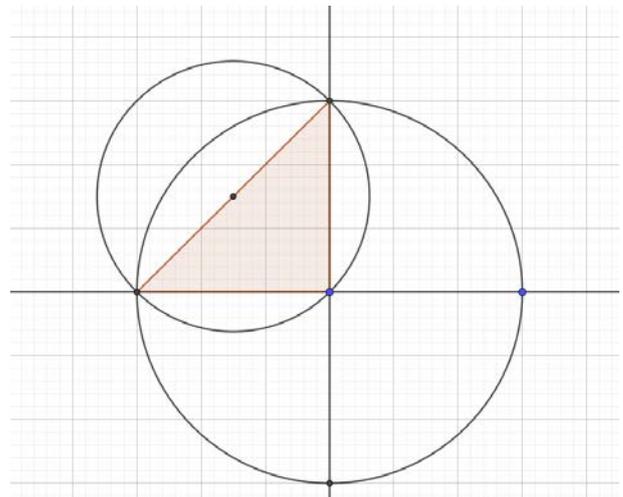


Fig. 21 Problema de la lúnula de Hipócrates trazos auxiliares 1.

Utilizando GeoGebra y utilizando el algoritmo propuesto llegaremos al área de la lúnula.

Al formar la figura, GeoGebra nos entrega los siguientes datos Fig. 22, los necesarios para poder utilizar el algoritmo (36).

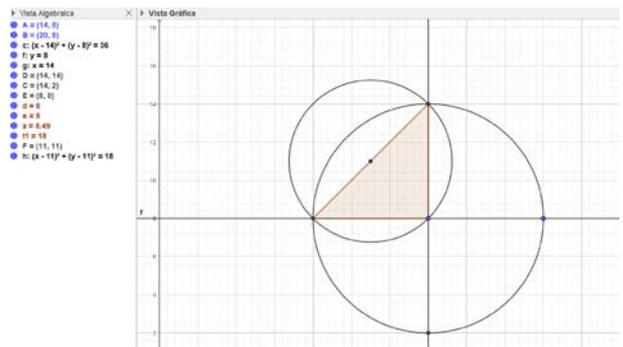


Fig. 22 Pantalla de GeoGebra mostrando la vista algebraica.

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] - 2 \left[ \int_{\liminf_{P_m}}^{x_2} C(x) dx - \int_{\limsup_{P_m}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup} l_n(x) dx - \int_{\liminf} C(x) dx \right] \quad (36)$$

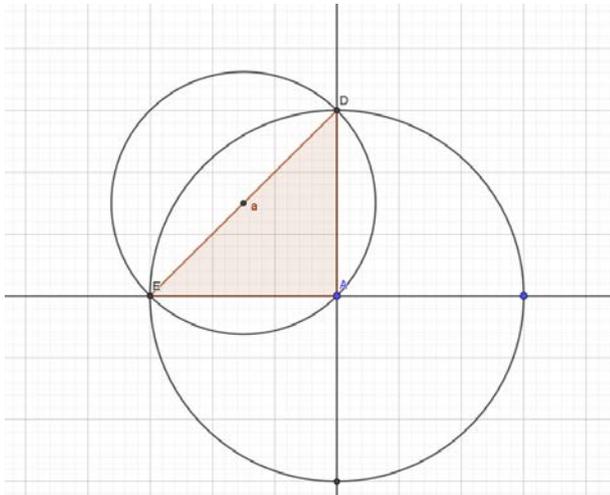


Fig. 23 Pantalla de GeoGebra mostrando puntos en el plano.

Tenemos que la distancia  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$  es la distancia al cuadrado del segmento “a” (37)

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[8.49]^2 - 2 \left[ \int_{\liminf_{P_m}}^{x_2} C(x) dx - \int_{\limsup_{P_m}}^{x_2} l(x) dx - \int_{\limsup} l_n(x) dx - \int_{\liminf} C(x) dx \right] \quad (37)$$

Ahora se traza en GeoGebra los segmentos auxiliares Fig. 24 y obtenemos los puntos “G”, “H” y “F” los cuales serán nuestros límites superior, inferior y punto medio, respectivamente.

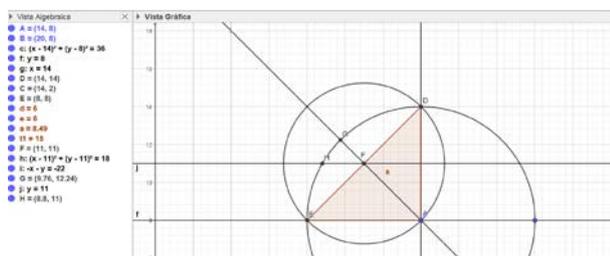


Fig. 24 Problema de la lúnula de Hipócrates trazos auxiliares 2.

Utilizo solo la coordenada de las abscisas y remplazo los límites (38).

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[8.49]^2 - 2 \left[ \int_{8.8}^{14} C(x) dx - \int_{11}^{14} l(x) dx - \int_{9.76}^{11} l_n(x) dx - \int_{8.8}^{9.76} C(x) dx \right] \quad (38)$$

Una vez remplazados los límites remplazo las funciones para poder integrar (39). Fig. 25

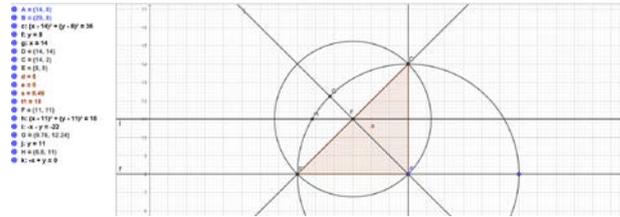


Fig. 25 Problema de la lúnula de Hipócrates trazos auxiliares 3.

$$A_L = \frac{1}{8}\pi[8.49]^2 - 2 \left[ \int_{8.8}^{14} (\sqrt{36 - (x - 14)^2} + 8) dx - \int_{11}^{14} x dx - \int_{9.76}^{11} (22 - x) dx - \int_{8.8}^{9.76} (\sqrt{36 - (x - 14)^2} + 8) dx \right] \quad (39)$$

$$A_L \approx 18.0313u^2 \quad (40)$$

El área con la que debe coincidir el resultado (40) es el área del triángulo la cual es  $18u^2$ .

## VII. CONCLUSIONES

La existencia del algoritmo propuesto queda demostrada bajo las condiciones estructurales establecidas en el modelo matemático desarrollado en la Sección IV A partir de la ecuación (15), y mediante la integración de las expresiones deducidas en (18) y (27), así como de los límites establecidos en (21), (28), (30) y (32), se obtiene constructivamente la validez de la proposición (1), garantizando así su existencia.

La consistencia del algoritmo se confirma al verificar que sus resultados no contradicen las propiedades fundamentales planteadas en la Sección III. Dichas propiedades, aplicadas rigurosamente en el desarrollo de la Sección IV, aseguran que el procedimiento conserva la coherencia lógica interna del sistema y opera dentro del marco de las estructuras previamente definidas.

La unicidad de la solución generada por el algoritmo se establece bajo la consideración de que, para cada conjunto de datos admisibles, la forma funcional introducida en (14) determina de manera natural e inequívoca la solución correspondiente. Esta propiedad queda demostrada en la Sección IV, mediante un argumento riguroso basado en la estructura del sistema.

El algoritmo propuesto para el cálculo de áreas de lúnulas presenta un error porcentual estimado del 0.17%, atribuible

principalmente a los efectos de redondeo numérico y a la sustracción de cifras decimales generada por el uso de software de representación dinámica como GeoGebra. Cabe señalar que, en un entorno de cálculo en el que se conserven con mayor fidelidad las cifras decimales (por ejemplo, mediante lenguajes de programación con precisión arbitraria), dicho error tiende a minimizarse, lo cual incrementa sustancialmente la exactitud del algoritmo y su confiabilidad frente al valor teórico esperado.

Desde una perspectiva metodológica, el algoritmo destaca por su capacidad para abstraer y automatizar el proceso tradicional de obtención de áreas de lúnulas, al integrar herramientas matemáticas avanzadas como la geometría analítica, el cálculo diferencial, el cálculo integral, la geometría integral, etc. Esta sinergia conceptual permite no solo obtener resultados precisos, sino también sistematizar el procedimiento de manera eficiente.

Una de las contribuciones más relevantes del presente trabajo consiste en demostrar que el cálculo de dichas áreas puede realizarse prescindiendo totalmente del uso de herramientas geométricas clásicas (como compás, regla o escuadra), apoyándose exclusivamente en el formalismo de las matemáticas modernas y en medios computacionales. Esto transforma el problema en un enfoque algorítmico reproducible y verificable, que abre la posibilidad de extender su aplicación a otras configuraciones geométricas o funciones curvas de interés. [1]

#### REFERENCIAS

- [1] Ornelas Tapia, J. J. (2025). Teorema para el cálculo general de áreas de lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral. Registro INDAUTOR: 03-2025-031010440400-01.
- [2] Spivak, M. (2012). *Calculus* (3ª ed.). México: Editorial Reverté.
- [3] Ayres, F., 1989. Serie de compendios SCHAUM TEORÍA Y PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 2ª ed. Madrid, España: McGraw-Hill.
- [4] Leithold, L., 1998. *El cálculo*. 7ª ed. Reino Unido: Oxford University Press.
- [5] Riemann, B. (1854) Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Göttingen: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- [6] Descartes, R. (1637) *La Géométrie*. Leiden: Jan Maire.
- [7] Stewart, J., 2016. *Calculus: Early Transcendentals*. 8th ed. Boston: Cengage Learning.
- [8] Boyer, C.B. and Merzbach, U.C., 2011. *Historia de la matemática*. 3rd ed. México: Pearson Educación

# Diseño y modelo matemático de un control ANFIS para una termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR.

Marcos Fajardo Rendón

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México

[marcos.fajardor@aeefcm.gob.mx](mailto:marcos.fajardor@aeefcm.gob.mx) <https://orcid.org/0000-0003-1438-3519>

**Resumen-** En el presente artículo se diseña, modela matemáticamente y manufactura una máquina para termoformar blísteres mediante un sistema de control con algoritmo ANFIS (*Adaptive Neuro Fuzzy Inference System/ Sistema Adaptativo de Inferencia Neuro Difusa*) utilizando una cámara de visión artificial térmica FIR (*Far Infrared / Infrarrojo Lejano*) para detectar un patrón isotérmico.

**Palabras Clave-** modelado matemático, ANFIS, control neuro difuso, machine learning, visión artificial.

**Abstract-** In this paper a blister thermoforming machine is designed, mathematically modeled and manufactured using a control system with an ANFIS (*Adaptive Neuro Fuzzy Inference System/ Sistema Adaptativo de Inferencia Neuro Difusa*) algorithm with a thermal artificial vision camera FIR (*Far Infrared / Infrarrojo Lejano*) to detect an isothermal pattern.

**Keywords-** mathematical modeling, ANFIS, neuro fuzzy control, machine learning, artificial vision.

**Аннотация-** В этой статье термоформовочная машина для блистерной упаковки спроектирована, математически смоделирована и изготовлена с использованием системы управления алгоритмом АНФИС (Адаптивная нейро-нечеткая система вывода / *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*), использующей тепловизионную камеру машинного зрения РПИ (Дальний инфракрасный / *Far Infrared*) для обнаружения изотермического рисунка.

**Лучевые Слова -** математическое моделирование, ANFIS, нейро-нечеткое управление, машинное обучение, компьютерное зрение.

**Mathematical Subject Classification:** 68T05, 93C42.

## I. INTRODUCCIÓN

Un blíster es un embalaje formado por una burbuja o cavidad de plástico transparente dúctil ante la presencia de temperaturas altas que por lo general es sellado con cartón para la exhibición y protección de productos.

Se seleccionó el material termoformable denominado PETG (*Polietileno Tereftalato Glicol*) [1][2]; el cual es un material transparente y resistente al impacto que ha sido altamente utilizado para aplicaciones médicas y alimentarias aprobadas por organismos como la FDA (*Administración de Alimentos y Medicamentos de los Estados Unidos*) para el contacto con alimentos. debido a sus características no tóxicas como ser libre de BPA (*Bisfenol A*) y otros compuestos tóxicos al contar con una superficie lisa que dificulta la acumulación de bacterias al no desprender microplásticos, además de no requerir un secado previo antes del termoformado. Su temperatura de ablandamiento por transición vítrea es (*Vicat*:  $\sim 85^\circ\text{C}$ ) [3] en donde pasa de un estado rígido a dúctil; en ese momento si el material está colgado sin un soporte inferior, la

gravedad y su peso generarán una deformación central con una geometría que se aproxima a una paraboloides de revolución o catenaria invertida[4].

Por otro lado una máquina para el termoformado de blísteres tiene la capacidad de empaquetar objetos sobre tarjetas impresas sin requerir de un molde ya que el material se adaptará a la forma del producto; lo que mejora los tiempos y movimientos de empaquetado industrial. Las hojas o films como el PET, PE y PVC cuentan con características termocontraíbles que les permiten después de un horneado ante la presencia de un vacío una termoformación.

Por lo general debido a los altos costos y falta de calidad las máquinas para termoformado trabajan con un sensor térmico mediante tiempos preprogramados. El presente trabajo propone un sistema inteligente con una mayor precisión mediante el diseño y construcción de una máquina de termoformado de blísteres mediante control inteligente por visión artificial; así como su modelamiento matemático.

## II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.

El sistema consta de una caja techada en donde la parte superior denominada “zona de horneado” cuenta con una resistencia eléctrica para calentar el plástico, una parte inferior denominada “zona de termoformado” con una bomba de vacío, un marco móvil con motor con la capacidad de desplazamiento vertical entre el “zona de horneado” y “zona de termoformado” que sujeta una lámina de PETG [1] de 0.5 mm de espesor, sensores inductivos que indican la posición “zona de horneado” y “zona de termoformado”, una cámara con visión artificial MLX90640 FIR (*Far Infrared Thermal Sensor/ Sensores Térmicos de Infrarrojo Lejano*) de 32 x 24 píxeles (*px*) de la marca Melexis[5]; la cual cuenta con una resolución de temperatura del objeto que va de  $-40$  a  $300^\circ\text{C}$  y una precisión típica de temperatura del objeto objetivo de  $\pm 1^\circ$  con dos opciones diferentes de campo de visión (*FoV*): estándar  $55^\circ \times 35^\circ$  y  $110^\circ \times 75^\circ$ , un gran angular con una a tasa de refresco de 16–32 Hz colocada lateralmente paralela a la “zona de horneado” brindando un campo de visión apuntando a  $90^\circ$  respecto al plano del marco donde se colocará el PETG permitiendo la visión artificial térmica de toda la superficie a termoformar lo que permite correlacionar los cambios de temperatura en una área más caliente y su desplazamiento vertical o altura de una forma parábola [4] que colgará de la superficie del marco móvil cuando se hayan alcanzado los valores de ductilidad necesarios que permitan reconocer un

patrón mediante un microcontrolador *ESP32* [6] como sistema de control inteligente, como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 1.

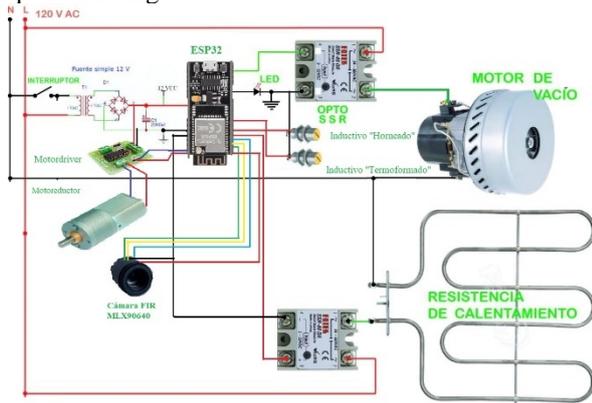


Fig. 1. Esquema electrónico de la termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR

La metodología de desarrollo será el modelado matemático del sistema para pasar a su diseño, programación, manufactura, entrenamiento y pruebas del sistema.

El proceso de termoformado comienza con la activación de la resistencia y la adquisición de datos con la cámara *MLX90640* [5] donde se obtiene un mapa térmico vertical para detectar un patrón isotérmico parabólico crítico ( $\geq 85^\circ\text{C}$ ) mediante su elongación máxima vertical; es decir una correlación temperatura-deformación de polímero [7] *PETG* [3] ductilizado para tomar la decisión de descenso del marco con el *PETG* colgado hacia la zona del molde en donde se activará una bomba de vacío que termoformará el *PETG* respecto a un molde.

La estrategia de control del *ESP32* [6] se basa en el modelo *ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System / Sistema de Inferencia Neuro-Difuso Adaptativo)* [8], el cual es una *ANN/RNA (Artificial Neural Network/ Red Neuronal Artificial)* [9] de tipo adaptativo con la capacidad de aprendizaje mediante entrenamiento con la capacidad de inferencia utilizando reglas difusas de primer orden denominadas “*Sugeno*” [10] junto con un modelo de función de pertenencia de tipo Gaussiano [11].

La adquisición de datos de la cámara se realiza mediante una matriz *FIR* [5] de  $32 \times 24 \text{ px}^2$  configurada con una frecuencia de muestreo de 32 Hz con interpolación térmica bilineal para incrementar la resolución a  $128 \times 96 \text{ px}^2$  con normalización térmica de  $20^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$  junto a un campo de visión que abarca lateralmente desde la sujeción del marco hasta  $\sim 50 \text{ mm}$  por debajo del nivel máximo de elongación esperada.

Ante un umbral térmico  $\geq 85^\circ\text{C}$  se procederá a realizar una segmentación binaria del área térmica deformada para detectar el contorno isotérmico y la altura de deformación para la localización de punto más bajo de la parábola colgante del marco.

Una vez realizada la localización, se mide la distancia desde el marco a ese punto con lo que se obtiene el cálculo de elongación por conteo de píxeles verticales  $\times$  factor de escala [12]; paralelamente se registra la temperatura en punto de máxima deformación.

La etapa de reconocimiento de patrones está formada primeramente por el análisis de perfil térmico deformado para realizar la verificación del patrón paraboloidal (catenario) [7]; una vez realizado se clasifica por zonas en: a) zona no

ductilizada ( $< 75^\circ\text{C}$ ), zona en transición ( $75\text{--}85^\circ\text{C}$ ) y zona blanda ( $\geq 85^\circ\text{C}$ ).

### III. TEORÍA DE CONJUNTOS DIFUSOS Y FUNCIONES DE PERTENENCIA

Definición 1.-Un conjunto nítido [13]  $A$  en un espacio universal de trabajo  $U$  con elementos  $x$ ; es decir  $A \subseteq \{(x) \in U\}$  dado por los posibles valores que pueden tomar las variables del sistema de termoformado es expresado como una función característica de la forma:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \leftrightarrow x \in A \\ 0 & \leftrightarrow x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Propiedad 1.-La definición 1 satisface las siguientes propiedades:

- Contabilidad dada la cardinalidad  $|A| = n: \exists n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
- Finitud Definida:  $\forall B \subseteq A; |A| < \infty \Rightarrow |B| \leq |A|$ .
- Complemento Perfecto: Para  $A \subseteq U$ ; su complemento  $A^c: A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} \forall (x) \in U \rightarrow \chi_A(x) + \chi_{A^c}(x) = 1$ ; de-biendo cumplir con la ecuación (25) quedando definido en términos del complemento como:  $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$

Definición 2.-Sea  $A$  un conjunto difuso [14] y  $X$  un universo con elementos  $x$  caracterizado por una función de grado de pertenencia binario  $\mu_A: X$  en donde:

$$\mu_A: X \rightarrow [0,1] \mid \forall (x) \in X \rightarrow \mu_A(x) \quad (2)$$

Definición 3.-Con la definición 2, se obtiene que la pertenencia máxima del sistema se cumple en uno o varios puntos pudiendo ser continua o discreta cuando:

$$\mu_A(x) = 1 \quad (3)$$

Propiedad 2.-De acuerdo con Zadeh (1965) [14] y formalizado posteriormente por Klir y Yuan (1995) [13], toda función de pertenencia para un conjunto difuso debe cumplir las siguientes propiedades [15] para  $\mu_A(x)$ :

- Acotamiento:  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1 \mid x \in X$
- Normalización:  $\exists x_0 \in X \mid \mu_A(x_0) = 1$
- Continuidad: La función de pertenencia  $\mu(x)$  debe ser continua en todo su dominio; es decir:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \mu(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \mu(x) = \mu(x_0) \mid \forall x_0 \in \mathbb{R}$  en donde las variables físicas cambian de forma continua con respecto a sus parámetros con derivadas que garantizan suavidad en la transición de valores de pertenencia [15].
- Parametrización flexible: Una función de pertenencia debe permitir modificar sus parámetros para adaptarse a distintas condiciones de operación.

Axioma 1.-El conjunto(2) tiene normalización si:

$$\exists x \in X \mid \mu_A(x) = 1 \quad (4)$$

Axioma 2.-El conjunto (2) tiene continuidad si la función de pertenencia utilizada debe ser necesariamente continua en su dominio [13], garantizando la derivabilidad necesaria para el aprendizaje basado en gradiente evitando la discontinuidad en procesos del sistema de control. Debido a la propiedad 2 de continuidad, acotamiento y normalización:

$$\forall \mu_A: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1] \text{ es continuo } \wedge \exists x \in \mathbb{R}^+: \forall \mu(x) > 0. \quad (5)$$

Escolio:

Si una función  $\forall \mu_A$  (2) es una función compuesta por funciones continuas  $f(x)$  y  $f'(g): \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1]$ , entonces el dominio de cada uno y de la función compuesta también es  $\mathbb{R}^+$  con codominio  $[0,1] \in \mathbb{R}^+$ ; donde el intervalo cerrado de solo dos valores no presenta puntos de discontinuidad.

Axioma 3.- Existe simetría [15] alrededor del centro  $c$  con una altura  $h$  (2):

$$\mu(c+h) = \mu(c-h) \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Axioma 4.- La parametrización es flexible de acuerdo a la propiedad 2 donde la función de pertenencia (2) permite el ajuste de parámetros [15] de forma diferenciable, facilitando la adaptación a distintas condiciones de operación. A través del centro  $c$  (6) y  $\sigma$  en las funciones Gaussianas:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

Axioma 5.- La función de pertenencia (acotamiento) [15] cuenta con el siguiente axioma de pertenencia que permite continuidad para procesos físicos continuos y parametrización flexible para adaptación [15]:

$$\mu_A(x) \in [0,1] = 0 \leq \mu(x) \leq 1 \quad (8)$$

Definición 4.- Una función (2) se denomina Gaussiana  $\mu(x)$  cuando es representada por una curva que al ser simétrica cuenta con un punto central  $c$  (media) (6) que permite que la función tome el mismo valor para puntos equidistantes a la izquierda y derecha de  $c$  (6), la desviación estándar  $\sigma$  de la curva que define su amplitud y la distancia desde el punto central  $c$  (6) a lo largo del dominio de la función de pertenencia (8) [15] descrita como:

$$h \in \mathbb{R} \begin{cases} h < 0 \rightarrow c - \sigma \\ h = c \rightarrow c = \sigma \\ h > 0 \rightarrow c + \sigma \end{cases} \quad (9)$$

La definición 4 permite la descripción del control de procesos continuos con lógica difusa [14], ya que garantiza que la función de pertenencia (8) reaccione de forma balanceada (simétrica) ante desviaciones iguales hacia cualquier dirección respecto a  $c$  (6) [16], como se muestra en la figura 2.

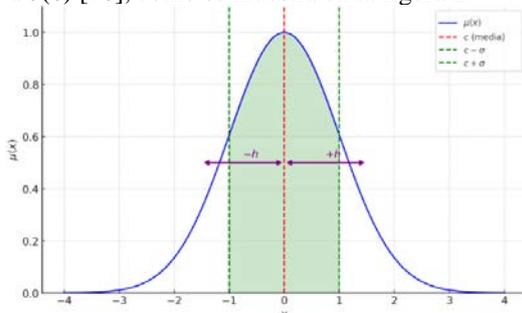


Fig. 2 control de procesos continuos con lógica difusa

Teorema 1.- Función de pertenencia Gaussiana: A partir de la definición 1, 2 y de la función de pertenencia (2) del axioma 5 y axioma 5 (6) que cumple con el axioma 1, se obtiene:

$$\exists c \in X: \mu(c) = 1 \quad (10)$$

Por lo que  $\mu(x)$  es continua en  $X$  y simétrica alrededor de  $c$ , lo que implica derivabilidad en  $X$ ; por lo que la transición de pertenencia deberá ser suave y por lo tanto puede ser escrita la función de pertenencia de forma Gaussiana como:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

Existiendo unicidad en la función de pertenencia Gaussiana bajo las propiedades de continuidad en  $\mathbb{R}$ , simetría en  $c$ , derivabilidad infinita (suavidad) y parametrización flexible descritas en propiedad 2.

Utilizando (11) dada una condición de operación  $\theta$  y un conjunto de condiciones de operación posibles  $\theta$ :

$$\forall \theta \in \Theta; \exists (c, \sigma) \in \mathbb{R}^+: \mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

La ecuación (12) explica la propiedad de parametrización flexible de la propiedad 2 y axioma 4 (7); permitiendo ajustar la función difusa para diferentes materiales, temperaturas, deformaciones, condiciones ambientales, manteniendo el mismo tipo funcional pero adaptado a cada escenario operativo [13] [14] [15].

La función (11) es solución única que satisface la propiedad 2 para una clase de funciones suavemente decrecientes en el campo  $\mathbb{R}$ :

$$0 < e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \leq 1 \rightarrow \forall (x) \in \mathbb{R} \quad (13)$$

De acuerdo a definición 3 (3) su valor máximo será cuando  $x = c$ :

$$\mu(c) = e^0 = 1 \quad (14)$$

De acuerdo a la definición 4 y axioma 2 la función Gaussiana es continua y derivable en todo su dominio; así mismo es parametrizable para el entrenamiento de la ANFIS en el lenguaje *Python*, permitiendo una aproximación del fenómeno termodinámico gradual del plástico PETG a modelar.  $\square$

Escolio:

La función (11) es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ ; por lo que es continua y derivable.

$$\mu(c+h) = \mu(c-h) \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (15)$$

$\sigma$  permite ajustar la dispersión (ancho de la campana), parametrizando el comportamiento del sistema.

Así mismo; dado que:  $X \subseteq \mathbb{R}$  y que  $\mu: X \rightarrow [0,1]$  es una función continua simétrica respecto a  $c \in X$  y suavemente decreciente a ambos lados derivable en  $X | \mu(c) = 1$  que cumple con la definición 3; lo anterior indica un control con parámetro positivo en  $\sigma$  que permite flexibilidad de adaptación del sistema con (11).

Demostración:

La existencia única para el sistema indica que si existe otra función Gaussiana  $\phi(x)$ :

$$\exists \phi(x) \neq \mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

La cual cumple con las características anteriores de la propiedad 2 en continuidad y derivabilidad del axioma 2 en  $X$ ,  $\phi(x) \in [0,1]$ , normalizado de acuerdo al axioma 1  $1\phi(c) = 1$ , simetría en  $c$  del axioma 3, decaimiento suave conforme  $|x - c| \rightarrow \infty$  y parametrización positiva  $\sigma$  del axioma 4.

Por simetría respecto a  $c$  (6) y decaimiento suave, cualquier función candidata  $\phi(x)$  debe depender solo de  $|x - c| \rightarrow \infty$ ; es decir  $\phi(x) = f(|x - c|)_{\rightarrow \infty}$ ;  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0,1]$  es continua y derivable,  $f(0) = 1$  y  $[0, \infty)_{\rightarrow 0}$  de acuerdo al axioma 2.

El comportamiento derivado de las propiedades físicas de los procesos continuos y suavemente decrecientes es modelable mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [15] donde su comportamiento es un decremento exponencial. ■

Definición 5.-Sea  $u$  una variable auxiliar para funciones simétricas definida como  $u = |x - c|$  que representa la distancia absoluta desde un punto  $x$  al centro de simetría  $c$  (6).

Definición 6.-Sea  $z$  una constante positiva de proporcionalidad que determina la velocidad de decaimiento de la función con respecto a  $u$  que indica la dispersión de la función que se parametrizará como  $z = \frac{1}{\sigma^2}$ ; lo anterior permitirá el ancho de la función de pertenencia.

Definición 7.-Sea  $A$  la constante de integración que resulta de la solución general de la ecuación diferencial determinada mediante la condición inicial  $f(0) = 1 \rightarrow A = 1$ ; lo anterior permite normalizar la función de pertenencia en su punto máximo [15] que es el total o la unidad:

$$\frac{df}{du} = -zuf(u) \mid u = |x - c|, z = f(\sigma), z \in \mathbb{R}^+ \quad (17)$$

Separando variables:

$$\frac{df}{f} = -zudu \quad (18)$$

Integrando:

$$\int \frac{df}{f} = -z \int udu \quad (19)$$

$$\ln f = -\frac{zu^2}{2} - C \quad (20)$$

La ecuación incluye la constante de integración de la antiderivada del logaritmo natural  $C$ . Como se indicó el caso  $A = 1$ , se asume entonces que:

$$f(u) = Ae^{-\frac{zu^2}{2}} \quad (21)$$

Aplicando la condición inicial donde  $f(0) = 1$ :

$$1 = Ae^0 \rightarrow A = 1 \quad (22)$$

Por lo que:

$$f(u) = e^{-\frac{zu^2}{2}} \quad (23)$$

La relación con  $\sigma$  de la ecuación (17) que parametriza la dispersión y flexibilidad, se define como:

$$z = \frac{1}{\sigma^2} \quad (24)$$

Por lo que usando la hipótesis de la existencia de (16) se obtiene:

$$\phi(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (25)$$

Demostración:

Si:

$$\exists \psi(x) \neq \mu(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (26)$$

Si (26) cumple con todas las propiedades impuestas anteriormente;  $\psi(x)$  debería resolver la misma ecuación diferencial que describe el comportamiento físico de decaimiento simétrico y suave en procesos térmicos continuos

$$\frac{d\psi}{du} = -z\psi(u) \quad (27)$$

Pero como es demostrado en ((17) su única solución en  $\mathbb{R}^+$  es la función Gaussiana; por lo tanto, cualquier función distinta que no cumpliría la suavidad derivable infinita mediante la constante de integración de la antiderivada del logaritmo natural para  $C^\infty$  descrita en (20) o no sería simétrica respecto a  $c$  o no permitiría una parametrización flexible con  $\sigma$  o no modelaría correctamente el comportamiento de decaimiento físico continuo que contradice las hipótesis dadas del modelo.

La única familia funcional conocida que posee estas propiedades simultáneamente es la de las funciones Gaussianas y cualquier otra función o bien no es simétrica o no es derivable infinitas veces [17].

Esto contradice la suposición de existencia de otra función distinta de la Gaussiana (26) con estas propiedades.

Por lo tanto; por reducción al absurdo la función Gaussiana es la única forma funcional posible bajo esas condiciones.

#### IV. COMPONENTE ADAPTATIVO

Se dice que un sistema es adaptativo [9] si sus parámetros pueden ajustarse dinámicamente en función de la información de entrada y la retroalimentación obtenida aprendiendo; es decir decrementando la tasa de error respecto al tiempo. En un sistema *ANFIS*, los parámetros ajustables corresponden a:

- Parámetros de premisas: definen la forma de las funciones de pertenencia como  $\sigma$  y  $c$  de acuerdo a los axiomas 3 y 4.
- Parámetros de consecuentes: son los coeficientes lineales y términos independientes que definen la salida nítida de cada regla difusa de acuerdo al axioma 3.

Definición 8.-Utilizando la definición 2 de conjunto difuso  $A$ , Se define el conjunto de parámetros como  $\theta$ ; siendo estas difusas, lineales y ajustables:

$i$ : El número de regla dentro del sistema  $[1, 2, \dots, i_{max}]$

$j$ : El número de variable de entrada del sistema  $[1, 2, \dots, j_{max}]$  estructurando el conjunto difuso  $A_j^i$  asociado a la  $x_j$ -ésima variable de entrada difusa en: (*bajo*, *medio*, *alto*) en la  $i$ -ésima regla.

Definición 9.-Análogamente  $p_j^i$  serán parámetros lineales ajustables ordenados por un peso  $w$  de importancia en el modelo según su relevancia; mismos que describen a las variables  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$  como:

$x_1$ : Área isotérmica ( $cm^2$ )

$x_2$ : Ratio de elongación ( $mm$ )= $h_2 / h_1 \geq 1.2$

$x_3$ : Temperatura ( $^{\circ}C$ )

$x_4$ : Área Geométrica ( $px^2$ )  $\geq$  umbral (calculado por regresión previa a entrenar).

Los anteriores parámetros servirán a modo de reglas para la toma de decisiones para bajar el marco de la zona de horneado a la zona de termoformación. Los parámetros están asociados a la  $x_j$ -ésima variable de entrada en la  $i$ -ésima regla de la definición 8.

Los parámetros pueden adoptar tres valores de pertenencia difuso por cada una de las variables: [Bajo, Medio y Alto]

Definición 10.-La salida nítida  $y^i$  controla el motor del marco donde se encuentra el plástico que baja hacia la bomba de vacío para el termoformado;  $y^i$  es generada por la  $i$ -ésima regla resultante de la combinación lineal de las entradas [18] y pertenece al conjunto nítido  $Y$  (definición 1) de posibles salidas numéricas definidas como:  $y = [0,1] \mid y \in \mathbb{R}$ ;  $y \in Y$ . Cada  $y^i$  será el producto de la combinación (lineal) de las entradas difusas ya defusificadas (mediante sus grados de pertenencia y parámetros) asignados a este conjunto nítido al ser un valor numérico concreto; por lo que una hipotética regla se interpretará como el grado de decisión [19] de modo que si:

$$y^i = \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \mid y \in \mathbb{R} \quad (28)$$

Definición 11.-El término independiente ajustable  $r^i$  denominado *bias* (sesgo) [20] para la regla  $i$ -énésima ajusta la salida  $y^i$  de la regla en caso de que ninguna variable de entrada tenga un valor (elongación nula, temperatura baja, área geométrica pequeña o área isotérmica pequeña); así mismo funciona como un ajuste base que permite desplazar la función lineal de salida hacia arriba o abajo para mejorar la precisión del modelo [21].

Definición 12.-Utilizando las definiciones (1-5) se obtiene la definición denominada: Regla de inferencia *Sugeno* [10] de primer orden para los conjuntos difusos  $A_j^i$  como:

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow A_1^i \wedge x_2 \rightarrow A_2^i \wedge x_3 \rightarrow A_3^i) \Rightarrow \\ y_1 = p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + p_3^i x_3 + r^i \end{aligned} \quad (29)$$

El modelo de la definición 12 descrito en (29) hereda la propiedad 2 para las funciones de pertenencia [13] [15] de la definición 3 y el teorema 1.

Definición 13.-Se denomina métrica de validación de un sistema *ANFIS* al proceso mediante el cual se evalúa la capacidad del modelo para generalizar correctamente su desempeño sobre datos no vistos durante su fase de

aprendizaje. Esto permite estimar la robustez y confiabilidad [8] del sistema antes de su implementación en entorno.

Para cuantificar la precisión del *ANFIS* en la predicción de la variable de control (decisión de descenso de marco), se emplearán las siguientes métricas:

a) MSE (Mean Squared Error/ Error cuadrático medio) [8]:

$$\frac{1}{\zeta} \sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (30)$$

b) MAE (Mean Absolute Error /Error absoluto medio) [15]:

$$\frac{1}{\zeta} \sum_{k=1}^{\zeta} |y_k - \hat{y}_k| \quad (31)$$

c) Coeficiente de determinación ( $R^2$ ) [15]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \bar{y})^2} \quad (32)$$

Para el sistema se utilizará el MSE que es adecuado para evaluar errores significativos ya que penaliza más los errores grandes [8].

Definición 14.-Sea:

$\zeta$ : El conjunto de datos de entrenamiento.

$k \mid k \in N, 1 \leq k \leq \zeta$ : El índice de los datos de entrenamiento

$x_k = [x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} \dots x_{nk}]$ : valores de entrada del dato  $k$ .

$y_k$ : Salida deseada para el dato de entrenamiento  $k$ .

$\hat{y}_k$ : Salida nítida (*crisp*) inferida para el dato  $k$  en  $y_k$  para  $x_k$ .

$E$ : Error promedio acumulado en  $\zeta$  respecto a (30) del *MSE*.

Propiedad 3.-Cada dato de entrenamiento  $k$  está formado por el par ordenado  $(x_k, y_k)$ . El *ANFIS* cuenta con la propiedad de "Aprendizaje supervisado" en donde mediante simulación o pruebas de laboratorio se detectan los errores mediante el *MSE* (30) a través de la función de error  $E$ :

$$E = \frac{1}{2\zeta} = \sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (33)$$

La ecuación (33) utiliza el índice  $k$  para recorrer secuencialmente cada dato de entrenamiento de  $\zeta$  durante los procesos de inferencia y ajuste de parámetros mediante la evaluación del error global del sistema *ANFIS* en su fase de aprendizaje supervisado.

Teorema 2.-Aprendizaje adaptativo mediante convergencia del *ANFIS*: Dado un sistema *ANFIS* con funciones de pertenencia continuas (teorema 1), diferenciables y parametrizables (propiedad 2); el aprendizaje supervisado basado en el error cuadrático medio (30) converge en un mínimo local [8]  $\min \in E$ ;  $x_{0min} \leftrightarrow \epsilon > 0 \mid f(x_0) \leq f(x) \rightarrow \forall x \mid x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon$  [ después de un número finito de iteraciones  $\zeta$  bajo un algoritmo híbrido (neuro-difuso) si las derivadas parciales de  $E$  respecto a los parámetros premisa y consecuente existen y son acotadas [15]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E)^n \rightarrow E_{min} \quad (34)$$

□

Demostración:

Si se dispone solamente de un dato de entrenamiento  $\zeta = 1$ ; entonces mediante (33) se obtendrá:

$$E = \frac{1}{2(1)} = \sum_{k=1}^1 (y_1 - \hat{y}_1)^2 \quad (35)$$

Al ser funciones de pertenencia; éstas contarán con el axioma 2 de continuidad (5) y 4 de parametrización flexible (7) de forma diferenciable para que el algoritmo de descenso de gradiente pueda computar una derivada no nula respecto a cada parámetro; lo anterior permite ajustar los valores para minimizar  $E$ ; por lo tanto, existirá una actualización válida.

Hipótesis:

Utilizando (34) por inducción:

$$\text{Si } \zeta = n \Rightarrow E^n \rightarrow E_{min} \quad (36)$$

Si en  $\zeta = n$  la convergencia es verdadera, al añadir un nuevo dato de entrenamiento  $k = n + 1$  se obtiene:

$$E^{(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2 + (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})^2 \quad (37)$$

Los axiomas 2 y 4 de las funciones de pertenencia aseguran que las derivadas parciales de  $E$  respecto a cada parámetro siguen existiendo y son acotadas. Por lo tanto; es posible ajustar los parámetros y mantener la convergencia en  $E_{min}$ .

Por inducción iterativa se concluye la convergencia:  $\forall \zeta \in \mathbb{N}^+$ ;  $E^{(\zeta)} \rightarrow E_{min}$  mediante el aprendizaje supervisado. ■

Definición 15.- La tasa de aprendizaje (learning rate)  $\eta$  garantiza que la convergencia del algoritmo es lo suficientemente pequeña para evitar divergencias (oscilaciones), pero no tan pequeña que ralentice excesivamente la convergencia, ya que si es grande en microprocesadores de baja gama como el propuesto ESP32 y la cámara MLX90640 generará una *lag* (retraso) en la respuesta.

## V. COMPONENTE NEURONAL

Las ANNs o RNAs (Artificial Neural Networks o Redes Neuronales Artificiales) [8] son sistemas computacionales bioinspirados en el cerebro humano [20] [22] con modelos como el perceptrón [21]; cada neurona artificial o nodo recibe señales a través de estructuras llamadas dendritas representado como una recopilación de señales de entrada pasando a través de conexiones llamadas pesos sinápticos  $w$  (definición 9) para ponderar la importancia de cada señal recibida para activar una función de activación que simula el disparo de una neurona biológica, si es superado un umbral, la neurona emite una señal de salida (axón). Las RNAs están compuestas neuronas organizadas en capas: entrada, capas ocultas y capa de salida.

El algoritmo de retropropagación del error (*backpropagation*) [23] permite entrenar RNAs profundas con múltiples capas para aprender y resolver problemas de control.

Un mecanismo RNA implementa una red tipo perceptrón multicapa capaz de aprender la relación entre las entradas y salidas mediante una fase de aprendizaje supervisada, ajustando los pesos sinápticos  $w$  que serán los parámetros del sistema (definición 9) para minimizar una función objetivo.

Definición 16.- De acuerdo a la definición 14 respecto a  $\zeta$

y de acuerdo al teorema 1 y definición 15  $\eta$  y definición 9 respecto a  $w$  el sistema cuenta con la capacidad adaptativa de inteligencia artificial con ajuste continuo respecto a sus parámetros  $\theta$  mediante una relación lógica causal premisa-consecuencia *Sugeno* (definición 12) en función de los datos de entrenamiento dados por:  $\{(x_k, y_k)\}_{\zeta=1}^{\zeta}$  en donde el cálculo de peso de activación  $w$  de regla  $i$  se al dato  $k$  para  $\forall x_k$  se describe como:

$$w_i^{(k)} = \prod_{j=1}^n \mu A_{ij}(x_{kj}) \quad (38)$$

Axioma 6.-Dea acuerdo a la definición 14 se puede axiomatizar que para la salida nítida (*crisp output*)  $\hat{y}_k$  estimada para el dato  $x_k$  es:

$$\hat{y}_k = f_i(x_k) \quad (39)$$

Siendo cada  $\hat{y}_k$  la salida individual de cada regla de  $\theta$ .

Axioma 7.- Debe existir una función de error  $E$  continua y derivable que mida la diferencia entre la salida nítida calculada por el sistema y la salida deseada permitiendo con ello saber el nivel de error (evaluación) para lograr una mejora (aprendizaje) del sistema inteligente; es decir:

$$\exists E; E = \frac{1}{\zeta} = \sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (40)$$

Axioma 8.-Existe un proceso de retropropagación[23] adaptativa dado un parámetro  $\theta$  [24] adaptable del sistema y una tasa de aprendizaje  $\eta$ ; el ajuste de parámetros debe realizarse mediante un algoritmo de retropropagación del error que permita minimizar  $E$  iterativamente. La actualización se efectúa por descenso de gradiente  $\nabla E$ :

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \eta \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad (41)$$

El axioma 8 demuestra al axioma 7 mediante la propiedad 2 respecto a la derivabilidad al utilizar una derivada parcial al escribir la diferenciación parcial  $\partial$  de una función multivariable  $f$  respecto a una de sus variables  $x_i$  que es la variable respecto a la cual se toma la derivada parcial manteniendo como constantes las demás de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \mid f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (42)$$

Para el ANFIS [8] la derivada parcial se calcula usando la definición previa de derivada parcial [15] donde  $\frac{\partial E}{\partial \theta}$  medirá la sensibilidad de la función de error total  $E$  respecto a cada parámetro  $\theta_j$  contenido en el vector de parámetros ajustables  $\theta$ . Lo anterior actualiza iterativamente los parámetros en dirección opuesta al gradiente, minimizando así el  $E$  conforme al método de descenso de gradiente, lo que permite el aprendizaje artificial del sistema. Este axioma asegura que el modelo adapta sus parámetros en dirección opuesta al gradiente del error para buscar un mínimo local *min* utilizado en teorema 1.

Teorema 3.-Convergencia de la fase RNA adaptativa: De forma similar al teorema 2 dado una RNA ANFIS con funciones de pertenencia con la propiedad 2 continuas y derivable [13];

así como una función de error cuadrático medio  $E$  continua con la propiedad 2 derivable y acotada inferiormente por 0, el algoritmo de ajuste adaptativo-neuronal por descenso de gradiente  $\nabla E$  convergerá hacia un valor mínimo local  $min \in E$ :  $x_{0min} \leftrightarrow \epsilon > 0 \mid f(x_0) \leq f(x) \rightarrow \forall x \mid x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon$  [ después de un número finito de iteraciones.  $\square$

Demostración:

Dado un conjunto del tipo difuso (2):

$$C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \forall \theta_j \in \mathbb{R}; \exists \frac{\partial E}{\partial \theta_j} \quad (43)$$

El cuál cumple con la propiedad 2 en continuidad y derivabilidad respecto a cada uno de los parámetros ajustables para el gradiente  $\nabla E$ ; ya que para cada  $\partial$  existente es continuo en su dominio; es decir:

$$\exists \nabla E = \frac{\partial E}{\partial \theta_1}, \frac{\partial E}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial \theta_n} \mid E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (44)$$

Si se parte de un valor inicial  $t = 0$  se obtendrá que:

$$\forall(t) = 0 \Rightarrow t_{min} = \theta^0 \quad (45)$$

Y como  $E$  es continua y derivable (axioma 7) (40); si en la iteración  $t$  se cumple con el teorema 3 con  $\eta$  que:

$$E^{(t+1)} = E^{(t)} - \eta \|\nabla E^{(t)}\|^2 \quad (46)$$

Entonces para el caso (44), (46) :

$$\eta_{lim \rightarrow \epsilon} \wedge E_0 \rightarrow E^{(t+1)} \leq E^{(t)} \quad (47)$$

Por lo tanto:

$$\exists T \in \mathbb{N} \mid \forall(t) \geq T \rightarrow E^{(t)} \approx E_{min} \quad (48)$$

Convergiendo entonces la fase RNA adaptativa [9] en el mínimo local ■

Corolario

Por el principio de inducción matemática, se concluye que para cualquier  $\zeta \in \mathbb{N}^+$  el ANFIS converge a un mínimo local  $min \in E$  mediante aprendizaje supervisado híbrido (neuro-difuso):

$$\forall(\zeta) \in \mathbb{N}^+, E^{(\zeta)} \rightarrow E_m \quad (49)$$

## VI. COMPONENTE DIFUSO

Definición 17.-La lógica difusa (*fuzzy logic*) es una extensión de la lógica booleana [14] donde representar grados intermedios entre 0 y 1 permitiendo representar fenómenos continuos como la temperatura del sistema. Un conjunto difuso es aquel en donde un elemento puede pertenecer parcialmente a un conjunto con un grado de pertenencia entre 0 y 1 [13] (definición 2) asignado mediante funciones de pertenencia (axioma 5) siendo estructuradas con base en el contexto del sistema, pudiendo tomar la función distintas formas como la Gaussiana (teorema 1). El control difuso está formado por cuatro etapas: fusificación (*fuzzification*) donde los valores de entrada del sistema se traducen a valores lingüísticos como “bajo”, “medio” o “alto” [14], la evaluación

de reglas difusas de forma declarativa [25], agregación encargada de combinar las salidas de todas las reglas que han sido activadas [10] y defusificación (*defuzzification*) [25] donde el sistema convierte los resultados difusos en una salida numérica nítida (*crisp*) [10].

Axioma 9.-Las funciones de pertenencia gaussiana difusa de acuerdo a la definición 2 donde existe un conjunto difuso [13]  $A_{ij}$  con el número de la regla  $i$  y el número de variable de entrada del sistema difuso  $j$  con una desviación estándar de la  $i$ -ésima regla difusa para la  $j$ -ésima entrada  $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}^+ > 0$  y centro  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ . La función de pertenencia Gaussiana difusa asocia a cada variable de entrada  $x_i$  de la forma respetando la terminología del autor [13]:

$$\mu A_{ij}(x_i) = \exp\left(\frac{(x_i - c_{ij})^2}{-2\sigma_{ij}^2}\right) \mid \sigma_{ij} \in \mathbb{R}^+; c_{ij} \in \mathbb{R} \quad (50)$$

Generalizando (50) con el teorema 1 de pertenencia Gaussiana  $\forall x_j \in \mathbb{R}; \exists \mu(x)$ ; la función de pertenencia o membresía del tipo Gaussiano  $\mu(x)$  [13] para cada entrada  $j$  donde con el número de la regla  $i$  y el número de variable de entrada del sistema difuso  $j$  con una desviación estándar de la  $i$ -ésima regla difusa para la  $j$ -ésima entrada es:

$$\mu_{ij}(x_j) = \exp\left(-\frac{(x_j - c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right) \mid \sigma_{ij} \in \mathbb{R}^+ > 0, c_{ij} \in \mathbb{R} \quad (51)$$

Axioma 10.- Del axioma 3 (6) se deriva que existe una simetría térmica en el sistema:

$$\forall h \in \mathbb{R} \rightarrow \mu A_{ij}(c_{ij} + h) = \mu A_{ij}(c_{ij} - h) \quad (52)$$

Lo anterior garantiza al igual que en el axioma 3, la continuidad y unicidad de la propiedad 2.

Definición 18.-Mediante la definición 8 y 12 se puede generar una regla de inferencia [10] de primer orden para los conjuntos difusos Gaussianos  $A_{ij}$  conocida como una regla de la entrada Sugeno  $[x] \mathbf{i}_j$  [10] con un número de reglas dado por  $i = [1, 2, 3, 4]$  y una salida nítida de la regla para una entrada  $j$ -ésima sobre las entradas nítidas descritas en la Definición 14 donde  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t \subset \mathbb{R}$  con  $t$  en segundos,  $p_{ij}$  el coeficiente lineal (aprendido) en la regla  $\mathbf{i}$  para la variable  $j$  en la salida  $x_i \in \mathbb{R}$  de la definición 11,  $r_i \in \mathbb{R}$  el sesgo (*bias*) [20] de la definición 11 regla  $\mathbf{i}$ , la salida nítida (*crisp*) para la regla  $\mathbf{i}$ :  $y_i \in \mathbb{R}$ , el parámetro de las variables ANFIS  $\theta = [c_{ij}, \sigma_{ij}, p_{ij}, r_i]$  (definición 8) se tiene a  $y_j \in \mathbb{R}$  descrita como:

$$(x_1 \rightarrow A_{i1} \wedge x_2 \rightarrow A_{i2} \wedge x_3 \rightarrow A_{i3} \wedge x_4 \rightarrow A_{i4}) \rightarrow y_i = (p_i^t X) + r_i \quad (53)$$

## VII. COMPONENTE INFERENCIAL

Axioma 11.-Un patrón de visión artificial térmica interpolada mediante la cámara térmica MLX90640 para el reconocimiento paramétrico parabólico es reconocible en un tiempo  $t$  en segundos mediante la diferencia de altura lateral en la parábola invertida del PETG durante el proceso térmico si cumple:  $a(t) > 0$ ,  $y = ax^2 + bx + c$ , con una coordenada

horizontal normalizada  $x \in [-1,1]$  partiendo de una posición vertical mínima de la curva  $y_{min} = 5 \text{ pixeles}$  y una altura  $h$  dada por  $H(t) = [y_{max}(t) - y_{min}(t)]$ ; la variable  $b(t)$  toma un valor con la capacidad de comparar deformaciones entre diferentes tiempos  $t$  sin necesidad de recalibrar el eje vertical dinámicamente,  $a(t)$  describe la elongación de la curva y  $c = 0$  es el campo central constante para todo instante  $t$  de visión del sensor térmico *MLX90640* mediante 48 pixeles de altura (girado) y un centro de 24 pixeles; por lo que el modelado respecto al patrón de visión artificial inferencial *FIR* se describe como:

$$y(x) = a(t)x^2 + b(t) \quad (54)$$

Definición 19.-Un área geométrica estimada para una imagen térmica interpolada  $AG \in \mathbb{R}$  en pixeles cuadrados ( $\mathbf{px}^2$ ) es obtenida por una altura  $H(t)$  como la diferencia vertical entre los píxeles máximos y mínimos que superan el umbral térmico de  $85^\circ\text{C}$  y con un ancho  $V$  constante de  $48 \text{ px}$ , quedando descrita como:

$$AG(t) = H(t) \cdot V \quad (55)$$

### VIII. MODELO MATEMÁTICO ANFIS

Definición 20.- (Sistema de control neuro-difuso *ANFIS*). Un sistema *ANFIS* (*Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*) [8] es una red híbrida que combina la inferencia difusa tipo *Sugeno* [10] con la capacidad de aprendizaje supervisado de las redes neuronales artificiales con una salida nítida y como media ponderada  $\hat{y}$  de todas las salidas donde el comportamiento de la salida es  $y \mid y \rightarrow 0 \text{ desciende}, y \rightarrow 1 \text{ no desciende}$ . La función *ANFIS* queda definida como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y \in [0,1] \quad (56)$$

Definición 21.-De acuerdo a la definición 14 un conjunto de datos de entrenamiento con  $\zeta \in \mathbb{N}^+$  con una función de pertenencia Gaussiana  $\mu A_{ij}$ , un número  $N \in \mathbb{N}^+$  de reglas difusas, un número  $n \in \mathbb{N}^+$  de entradas por dato, un valor de la entrada  $j$  del dato  $k: x_{kj} \in \mathbb{R}$  el centro de  $A_{ij}: c_{ij} \in \mathbb{R}$ , la desviación estándar para la función Gaussiana  $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}^+$ , el coeficiente lineal para la variable  $x_j$  en la regla  $i$   $p_{ij} \in \mathbb{R}$ , el sesgo (bias) de la regla  $i: r_i \in \mathbb{R}$ , la salida nítida (crisp) para el dato  $k: \hat{y}_k \in \mathbb{R}$ , el parámetro de las variables *ANFIS* anteriormente descritas  $\theta = [c_{ij}, \sigma_{ij}, p_{ij}, r_i]$ , tasa  $\eta \in \mathbb{R}^+$  de aprendizaje en el algoritmo adaptativo, iteración  $t \in \mathbb{N}^+$  de aprendizaje, datos de entrenamiento con vectores de entrada  $x_k \in \mathbb{R}^n$  y  $y_k \in \mathbb{R}$  vectores de salida deseados y error cuadrático medio respecto a los parámetros  $E \in \mathbb{R}^+$  definidos previamente se puede encontrar un conjunto de datos de entrenamiento  $D \subset \zeta$  que:

$$D = \{(x_k, y_k)\} \mid k = 1, 2, \dots, \zeta; (x_k, y_k) \in i^n \quad (57)$$

Teorema 4.-Salida nítida (*crisp*) de un sistema *ANFIS*: Con base en el la definición 10, 14, la ecuación (54) y el axioma 7 se define que una salida nítida de un sistema *ANFIS* es un par ordenado  $(w, i)$  con el peso  $w$  de la regla  $i$  para el dato  $k$  en  $\mu A_{ij}(x_k)$ :

$$(i, \Phi) \mid w_i^{(k)} = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{(x_{kj}-c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}} \quad (58)$$

Demostración 1:

Dada la relación regla-pertenencia-salida en  $n$  es:

$$i \mid \forall x_n \rightarrow A_{in}(x_k) \Rightarrow f_i(x_k) = \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{kj} + r_i \quad (59)$$

Por lo tanto, la función media ponderada de todas esas salidas nítidas (*crisp*) de las reglas activadas, usando sus pesos de activación  $w_i(x_k)$  es estadísticamente (no factorizable) en  $\mathbb{N}$ :

$$\hat{y}_k = \frac{\sum_{j=1}^N w_i(x_k) f_i(x_k)}{\sum_{j=1}^N w_i(x_k)} \quad (60)$$

Corolario:

Su ajuste adaptativo lo describe la ecuación con el valor  $t$ :

$$\theta^{t+1} = \theta^t - \eta \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad (61)$$

Y su error de aprendizaje está definido por:

$$E = \frac{1}{2\zeta} = \sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (62)$$

Demostración 2:

Usando el Axioma 6 y (53) la salida individual para cada regla es nuevamente es:

$$f_i(x_k) := \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{kj} + r_i \quad (63)$$

Por lo que la salida nítida estimada es la media ponderada  $\hat{y}_k$  para un dato  $x_k$ ; tras ponderar todas las reglas según su peso de activación  $w$  queda:

$$\hat{y}_k = f(x_k) = \frac{\sum_{j=1}^N (\prod_{j=1}^n e^{-\frac{(x_{kj}-c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}) \cdot (\sum_{j=1}^n p_{ij}x_{kj} + r_i)}{\sum_{j=1}^N (\prod_{j=1}^n e^{-\frac{(x_{kj}-c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}})} \quad (64)$$

Sustituyendo por  $w_i$  y  $f_i$  en (64):

$$\hat{y}_k = f(x_k) = \frac{\sum_{j=1}^N w_i(x_k) f_i(x_k)}{\sum_{j=1}^N w_i(x_k)} \quad (65)$$

Que es (60) ■

Escolio.-Sean las tres reglas difusas  $i$  (definición 8) a variables  $j$  (bajo, medio, alto) para el dato  $k$ :

$$x_k \mid f_1(x_k) = 10, f_2(x_k) = 20, f_3(x_k) = 30, f_4(x_k) = 30$$

Con cuatro pesos de activación  $w$  sobre  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$  (definición 9) donde:

$$w_1 = 0.2, w_2 = 0.5, w_3 = 0.3, w_4 = 0.8 \rightarrow$$

$$\hat{y}_k = \frac{(0.2 \times 10) + (0.5 \times 20) + (0.3 \times 30) + (0.8 \times 40)}{0.2 + 0.5 + 0.3 + 0.8} = 29.444$$

El valor final nítido estimado por el ANFIS el dato  $x_k = 29.444$ .

Propiedad 4.-Mediante la definición 21 se obtiene la propiedad en donde el peso de activación de la entrada  $j$  de acuerdo al Teorema 4 de salida nítida ANFIS y la definición 16 dado un par ordenado con el peso  $w$  de la regla  $i$  para el dato  $k$  en  $\mu A_{ij}(x_k)$  se puede adaptar (58) al sistema como:

$$w_j = \prod_{i=1}^4 \mu A_{ij}(x_i) \quad (66)$$

Definición 22.-Una Salida global del sistema ANFIS de acuerdo a (65) con la suma de entradas  $j \in \mathbb{N} = \sum_{j_{min}}^{j_{max}} i_j$  y mediante el teorema de salida nítida ANFIS 4; la función media ponderada global  $\hat{y}$  de las salidas nítidas y de reglas activadas  $i$  usando los pesos de activación  $w_j$  es estadísticamente (no factorizable) en  $\mathbb{N}$  definida como:

$$\hat{y} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{max}} w_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^m w_j} \mid \sum w_j > 0 \quad (67)$$

$$\hat{y}_k = f(x_k) = \frac{\sum_{j=1}^N w_i(x_k) f_i(x_k)}{\sum_{j=1}^N w_i(x_k)} \quad (68)$$

Definición 23.-La salida de la regla individual  $i$  para el dato  $x_k$ ; es decir el término lineal de una regla es:

$$f_i(x_k) \quad (69)$$

Definición 24.-La salida global defusificada del sistema ANFIS tras ponderar todas las reglas según su grado de peso de activación  $w$  es:

$$\widehat{y}_k = f_i(x_k) \quad (70)$$

Definición 25.-Dada una función de pertenencia difusa Gaussiana por:  $A_{ij}$  donde:  $\mu A_{ij}(x_{kj}) = e^{-\frac{(x_{kj}-c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}$  es un mecanismo adaptativo y neuro-difuso de ajuste paramétrico  $\Phi$  con correspondencia a una base de reglas difusas para un dato  $k$  es:

$$\Phi: i \mid \forall x_n \rightarrow A_{in}(x_k) \Rightarrow f_i(x_k) \quad (71)$$

Definición 26.-Un par ordenado  $\Phi$  con el peso de activación  $w$  de la regla  $i$  para el dato  $k$  para  $\forall x_k$  se describe como:

$$(i, \Phi) \mid w_i^{(k)} = \prod_{j=1}^m \mu A_{ij}(x_{kj}) \quad (72)$$

Definición 27.- Dadas las entradas nítidas de la definición 9:  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ :  $x_1$  el área isotérmica ( $\geq 85^\circ\text{C}$ ) en  $\text{cm}^2$ ,  $x_2 = \frac{h}{h_0} \in \mathbb{R}^+$  ratio de elongación vertical,  $x_3$  la temperatura máxima( $^\circ\text{C}$ ) y  $x_4$  el área geométrica de deformación vertical estimada por visión artificial en  $\text{px}^2$ ; por lo que el conjunto de entradas nítidas del sistema  $X$  se define como:

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4] \subset \mathbb{R} \quad (73)$$

Definición 28.- Usando el axioma 11 un patrón geométrico de deformación (elongación) [26] en visión

computacional para el sistema se modela como una catenaria térmica dada por la parábola:  $f(x) = a(x - h)^2 + k \mid a > 0$  siendo una condición geométrica generalizable y necesaria para considerar una forma de ablandamiento adecuada del PETG.

Teorema 5.-Salida ANFIS total: De acuerdo al teorema de funciones de pertenencia Gaussianas descritas como una estructura continua (propiedad 2), las reglas Sugeno de 1er orden (definición 18), el patrón parabólico (definición 28, axioma 11), el teorema 4 de salida nítida que describe la decisión de descenso del sistema y la definición 2 del conjunto difuso  $X$ , se puede indicar que  $\mu_i(X) = \prod_{j=1}^4 \mu_{ij}(x_j)$  es la activación difusa total de la  $i$ -ésima regla modelada como:

$$\hat{y}(X) = \frac{(\sum_{i=1}^{i_{max}} \mu_i(X)) \cdot (p_i^t X + r_i)}{\sum_{i=1}^m \mu_i(X)} \quad (74)$$

Demostración:

De acuerdo a la propiedad 2 se tienen los axiomas 1 y 2; así mismo la definición 10 de salida nítida  $r_i \in \mathbb{R}$  para el dato  $k$ :  $\widehat{y}_k \in \mathbb{R}$  del modelo ANFIS (67) de (56) y (57); se demostrará que  $\exists \widehat{y}_k \in [0,1]$  (definición 10) como composición de funciones (demostrado en axioma 2) neuro difusa de las entradas de visión térmica representadas como una función continua (propiedad 2, axioma 2) definida por las reglas difusas con premisas Gaussianas.

Dado un conjunto de entradas  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}$  sus funciones de pertenencia Gaussianas continuas  $\mu_{ij}(x_j)$  y un conjunto de reglas de inferencia difusas Sugeno de 1er orden (54),(definición 18), el modelo ANFIS generará una salida nítida (crisp) sobre un dato  $k$ :  $\widehat{y}_k \in \mathbb{R}$  que se comporta como una función continua y diferenciable sobre  $X \in \mathbb{R}$  (73) para la toma de decisiones mediante el reconocimiento de un patrón térmico de elongación mediante visión artificial FIR para el control del descenso de un blíster PETG hacia una bomba de vacío para la termoformación sobre un molde.

Mediante inducción al número de reglas difusas  $i$ ; para el caso donde  $i = 1$  y sustituyendo en la definición 18 de reglas Sugeno difusas se reescribe la expresión como:

$$(x_1 \rightarrow A_1 \wedge x_2 \rightarrow A_2 \wedge x_3 \rightarrow A_3 \wedge x_4 \rightarrow A_4) \Rightarrow f_1(x) = (p_1^1 + p_2^2 + p_3^3 + p_4^4) + r_1 \quad (75)$$

Utilizando a la definición 25 y el axioma 9 de pertenencia Gaussiana difusa; para el sistema quedará con cada función  $\mu_{ij}(x_j)$  sustituyendo  $i = 1$  como:

$$\forall (\mu_{1j}(x_j)) = \exp\left(-\frac{(x_j - c_{1j})^2}{2\sigma_{1j}^2}\right) \quad (76)$$

Cumpliendo; ya que:  $\sigma_{1j} \in \mathbb{R}^+ > 0, c_j \in \mathbb{R}$  ■

Así mismo el peso de la salida nítida de esta única regla  $i = 1$  es mediante la Propiedad 4 (peso de activación de reglas) respecto a  $j$ :

$$w_1 = \prod_{j=1}^4 \mu_{1j}(x_j)$$

$$\text{Si } i = 1 \rightarrow \hat{y} = (p_1^1 x_1 + p_2^2 x_2 + p_3^3 x_3 + p_4^4 x_4) + r_1 \quad (77)$$

El modelo *ANFIS* (74) con  $i = 1$  es una función continua lineal sobre  $\mathbb{R}$  que es multiplicada por una función Gaussiana positiva y el resultado es un producto de funciones continuas; lo cual es válido por la propiedad de continuidad de funciones compuestas, ya que "...la composición de funciones continuas es continua" bajo la condición de que la función exterior sea continua en el valor que toma la función interior[27] [28].

Hipótesis:

Dado que  $i = 1$ ; mediante el teorema de salida *ANFIS* se puede obtener una función continua de salida nítida  $\hat{y}$  del sistema de termoformado:

$$\text{Si } i = k \rightarrow \widehat{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^k w_i f(x)_i}{\sum_{i=1}^k w_i} \mid w_i = \prod_{j=1}^4 \mu_{ij}(x_j) \quad (78)$$

$$\text{Así mismo: } \forall f(x)_i = \sum_{j=1}^4 (p_{ij} \cdot x_j) + r_i.$$

Por inducción en (75) se obtiene que si:

$$i = k + 1 \rightarrow (x_1 \rightarrow A_{1k+1} \wedge x_2 \rightarrow A_{2k+1} \wedge x_3 \rightarrow A_{3k+1} \wedge x_4 \rightarrow A_{4k+1}) \Rightarrow f(x)_{k+1} = \sum_{j=1}^4 (p_{k+1} \cdot x_j) + r_{k+1} \quad (79)$$

Actualizando el peso de la salida nítida (77) de la regla  $i$  y dado que  $i = k + 1$  mediante la propiedad 4 respecto al peso de activación de reglas respecto a  $j$  se obtiene:

$$w_{k+1} = \prod_{j=1}^4 \mu_{k+1j}(x_j) \quad (80)$$

Con una salida nítida (78) actualizada:

$$\widehat{y}_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} w_i f(x)_i}{\sum_{i=1}^{k+1} w_i} \quad (81)$$

Siendo  $\widehat{y}_{k+1}$  una función racional de funciones de pertenencia Gaussiana continuas, donde el denominador es positivo para algún valor en su dominio cumpliendo con toda la propiedad 2 en acotamiento, normalización, continuidad funciones de pertenencia Gaussianas)  $\forall \mu > 0$  y parametrización flexible  $\Phi$  (definición 25). Por lo tanto  $y_{k+1}$  también es continua en  $\mathbb{R}^+$  ■

La función de salida nítida  $\hat{y}$  del *ANFIS* cumple que  $\forall i$  de reglas es continua en  $\mathbb{R}^+$  ya que es verdadero que  $\exists \widehat{y}_k \in [0,1], \widehat{y}_k \in \mathbb{R}^+$  cumpliendo con las propiedades de acotamiento y continuidad la función neuro difusa de las entradas de visión térmica representadas como una función continua (axioma 11) definida por las reglas difusas con premisas Gaussianas (axioma 9).

**Teorema 6.-Aprendizaje del sistema *ANFIS* mediante entrenamiento por aprendizaje supervisado:** De acuerdo a la definición de la tasa de aprendizaje y la definición 14 en donde se describía al conjunto de datos de entrenamiento  $\zeta$ ,  $E$  como el error promedio acumulado en  $\zeta$ ,  $k$  como el índice de los datos de entrenamiento, la definición 13 de *MSE*,  $X_k$  como el vector de valores de entrada correspondientes al dato  $k$  y como la salida deseada  $y_k$  para el dato de entrenamiento  $k$ ; el modelo *ANFIS* que describía al conjunto de datos de entrenamiento (57) queda actualizado como:

$$D = \{(x_k, y_k)\} \mid k = 1, 2, \dots, \zeta; (x_k, y_k) \in \mathbb{R} \quad (82)$$

Se puede establecer que el nuevo teorema que establece al *ANFIS* con aprendizaje supervisado de acuerdo al número de datos  $\zeta \in \mathbb{N}$  en donde el sistema converge con el parámetro de las variables  $\theta = [c_{ij}, \sigma_{ij}, p_{ij}, r_i]$  de la definición 9 y 11:

$$D = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\zeta} \mid k = 1, 2, \dots, \zeta; (x_k, y_k) \in \mathbb{R} \quad (83)$$

Mediante el conjunto de entrenamiento  $D$  (83) es posible minimizar el error cuadrático medio  $E$  en el entrenamiento *ANFIS* por aprendizaje supervisado de acuerdo a la definición 13 y 14 del *MSE* mediante:

$$E = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=1}^{\zeta} (y_k - (yX_k))^2 \quad (84)$$

□

Demostración:

Se demostrará que el *ANFIS* es capaz de aprender a partir de  $\zeta$  datos [8] mediante la actualización de sus parámetros de las variables [24] y su error mínimo:  $\theta = [c_{ij}, \sigma_{ij}, p_{ij}, r_i] \in \mathbb{R} \mid E_{n \rightarrow 0}$ .

Si  $\zeta = 1 \rightarrow (x_1, y_1)$  el grado de pertenencia Gaussiana [15] mediante el axioma del sistema difuso similarmente a (76) será:

$$\mu_{ij}(x_{j1}) = \exp\left(-\frac{(x_{j1}-c_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right) \quad (85)$$

Así mismo; mediante la propiedad de activación de reglas de la propiedad 4, el peso de disparo de la regla  $i$  para la variable  $j = 1$  en la salida  $x$  mediante (77) será:

$$w_i = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_{j1}) \quad (86)$$

Por lo que utilizando la ecuación de la definición de salida total *ANFIS* (68) mediante la definición 18 (regla de inferencia de 1er orden para los conjuntos difusos Gaussianos); la regla de *Sugeno* de 1er orden para la salida total será:

$$\widehat{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i_{max}} (w_i f_i)}{\sum_{i=1}^{i_{max}} f_i} \quad (87)$$

Utilizando la definición 15 de tasa de aprendizaje  $\eta$  y que el error cuadrático medio es:  $E = \frac{1}{2} = (y_1 - \hat{y}_1)^2$ ; donde  $E$  es una función diferenciable de los parámetros  $p_{ij}, q_i$  del teorema 4, como se demostró en: (60),(61); entonces respecto a  $\mu$  existirá un gradiente que tiende a minimizarse el cual actualiza los parámetros  $\theta$  como se demostró en el corolario del teorema de salida *ANFIS* respecto al ajuste adaptativo en el tiempo (65); por lo que la ecuación quedará sustituyendo el parámetro general  $\theta$  por sus elementos  $p_{ij}, q_i \in \theta$  como:

$$p_{ij}^{t+1} = p_{ij}^t - \eta \frac{\partial E}{\partial p_{ij}} \quad (88)$$

$$q_i^{t+1} = q_i^t - \eta \frac{\partial E}{\partial q_i} \quad (89)$$

Por lo tanto, existe una corrección de parámetros (88) y (89) cuando el dato  $\zeta = 1$ ; es decir ante la presencia del error  $E$  el sistema es capaz de aprender minimizando  $E_{k \rightarrow 0}$  debido a la actualización de sus parámetros de las variables  $\theta$ .

Respecto al peso de salida si  $\zeta = k$  datos; se cumplirá que la corrección de parámetros  $\theta$  de las variables sea:

$$E_k = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (90)$$

Lo anterior minimiza el error total iterativamente haciendo que  $E_{k \rightarrow \epsilon}$ . Para demostrar que cumple para  $\zeta = k + 1$ , se genera un nuevo dato de entrenamiento  $X_{k+1}$  de entrada correspondiente al dato  $k + 1$  y su salida deseada  $y_{k+1}$  para el dato de entrenamiento  $k + 1$  de acuerdo al modelo ANFIS del conjunto de datos de entrenamiento quedará actualizado como:

$$E_{k+1} = \frac{1}{2k+1} [\sum_{i=1}^{k+1} (y_i - \hat{y}_i)^2 + (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1})^2] \quad (91)$$

Utilizando el teorema de convergencia y el axioma 3 respecto al Proceso de Retropropagación Adaptativa [23] respecto al parámetro  $\theta$  [24] adaptable del sistema y su tasa de aprendizaje  $\eta$ , su el ajuste  $\theta$  de retropropagación del error minimiza  $E$  iterativamente por  $\nabla E$ ; por lo que la nueva derivada del  $E$  respecto a cualquier parámetro  $\theta$  al sustituirse en  $f_i$  de la definición 2 lineal la ecuación (91) con  $\theta$  será:

$$\frac{\partial E_{k+1}}{\partial \theta} = \frac{1}{k+1} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial E_i}{\partial \theta} + \frac{\partial E_i}{\partial \theta} \right) \quad (92)$$

Las funciones de pertenencia de la ecuación anterior son diferenciables mediante el axioma 9, donde  $f_i$  es lineal de acuerdo al teorema 5 y la ecuación (69) de la definición 23; por lo que cualquier nuevo término por iteración es diferenciable y se actualizarán los parámetros  $\theta$  por  $\nabla E_{k+1} \rightarrow E_{k \rightarrow 0}$ .

Por lo tanto; mediante la anterior inducción se cumple que en el sistema ANFIS para todo dato existirá un aprendizaje entendido como el decremento de error:

$$\forall \zeta \in \mathbb{N} \rightarrow \nabla E \rightarrow E_{k \rightarrow 0} \blacksquare \quad (93)$$

### IX. DISEÑO DEL SISTEMA.

El módulo de control inteligente con algoritmo ANFIS/RNA [8] evalúa el área geométrica ( $px^2$ ), el área isotérmica en ( $px^2$ ), la ratio (razón) de elongación vertical ( $mm$ ) =  $altura\_actual / altura\_inicial \geq 1.2$  para correlacionar la deformación, área geométrica ( $px^2$ ) [7] y temperatura en el punto de elongación máxima ( $^{\circ}C$ ) en tiempo real para evaluar la condición de activación de motor de descenso a la “zona de termoformado” en donde es válida cuando la elongación  $\geq$  umbral experimental y la temperatura  $\geq 85^{\circ}C$  para activar el descenso del marco.

El sistema inteligente debe ser entrenado con imágenes térmicas simuladas o datos que describan a la parábola colgada sobre el PETG [1] y pruebas de laboratorio, los conjuntos difusos de temperatura son: [bajo, medio y alto]; así mismo el conjunto de área deformada difusa será: [mínima, considerable y máxima]. La salida defusificada [11] será: descenso del marco si temperatura  $\geq 85^{\circ}C$  y área geométrica deformada ( $px^2$ )  $\geq$  umbral (calculado por regresión previa); si los píxeles centrales son mayores que los laterales

simétricos, entonces éstos se reconocerán como un patrón parabólico, por lo que el área deberá ser  $\geq$  umbral en píxeles para que la forma parabólica [7] sea verdadera dando paso a la activación del descenso. Lo anterior es bajo entrenamiento que generan reglas con base al aprendizaje del sistema. El diagrama de flujo general se muestra en la figura 3.

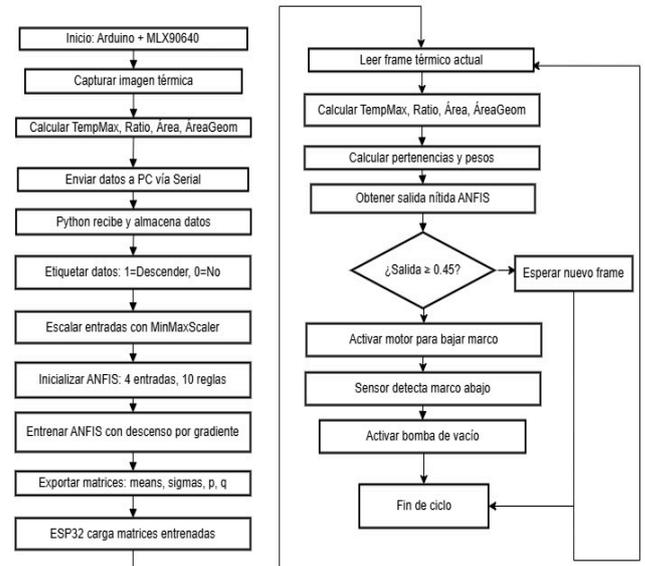


Fig. 3. diagrama de flujo general del sistema

El entrenamiento del sistema se realiza en el lenguaje *Python* conectado a la adquisición de la termo-cámara mediante el *ESP32* [6] hasta que ha aprendido mediante las librerías *numpy* y *skfuzzy* colocando las variables difusas de entrada: temperatura, ratio, área isotérmica y área geométrica.

La variable de salida: será el descenso que activa el motor del marco hacia la zona de termoformado. Se generan las funciones de pertenencia para cada variable, entrada y salida. Se aplica la fusificación Gaussiana [15] definiendo conjuntos lingüísticos (bajo, medio, alto) de la temperatura. Las reglas difusas *Sugeno* [10] de primer orden activan el “descenso” cuando ( $temperatura=alta \wedge ratio=alto \wedge \acute{a}rea=grande \wedge \acute{a}rea\ geométrica=grande$ ); “espera” cuando ( $temperatura=media \vee \acute{a}rea\ geométrica=media$ ) y “no” cuando ( $temperatura=baja \vee \acute{a}rea\ geométrica=bajo$ ), como se muestra en la figura 4.

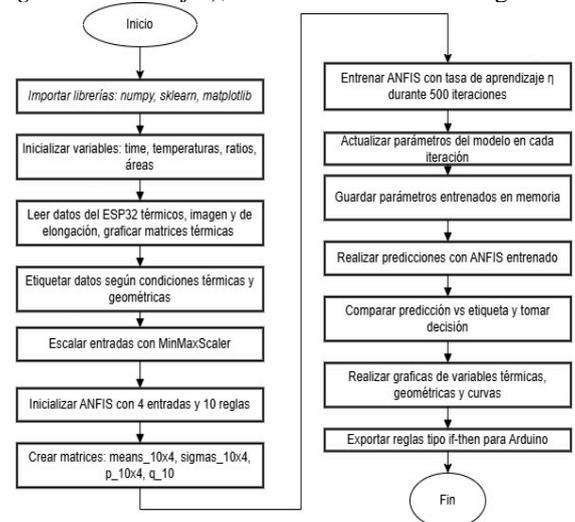


Fig. 4. Diagrama de flujo de entrenamiento que genera las matrices.

Las reglas aprendidas son agregadas al sistema de control no difuso (en ese momento) para crear el sistema de

entrenamiento del sistema hacia el *ESP32* [6] que lee las variables (temperatura, ratio, área y área geométrica) seriales del *ESP32* asignando valores.

Al ejecutar el sistema difuso se toma la decisión de descenso del motor junto con gráficas de control.

Una vez que aprendió el sistema en *Python* son cargados los datos de aprendizaje exitoso mediante matrices de  $10 \times 4$  mediante promedios (centros Gaussianos), sigmas (anchuras de las funciones Gaussianas),  $p$  (coeficientes lineales de la capa 4) y  $q$  (términos independientes) en el *ESP32*.

Se configuraron así mismo las entradas digitales para los sensores inductivos de las posiciones calentamiento y termoformado, el motor de corriente directa de desplazamiento, un relevador de estados sólidos la bomba de vacío y la comunicación serial para depuración o monitoreo.

El sistema final entrenado se cicla en el módulo de adquisición de datos de las variables matriz térmica, temperatura máxima, área isotérmica, patrón parabólico, altura, ratio (altura/altura inicial) y área geométrica ( $m \times n$ ).

La decisión *ANFIS* con el modelo entrenado trabaja con las condiciones difusas de activar el motor de "descender" si ( $temperatura\_max \geq 80$ ) y ( $ratio \geq 1.17$ ) y ( $area\_isotermica \geq 18.5$ ) y ( $area\_geometrica \geq 380$ ) hasta que el sensor inductivo indique que se encuentra en la zona de termoformado activando la bomba de vacío durante 1 minuto terminando con el blíster *PETG* listo; "esperar" si ( $temperatura\_max \geq 78$ ) y ( $ratio \geq 1.13$ ) y ( $area\_isotermica \geq 15$ ) y ( $area\_geometrica \geq 300$ ), en caso contrario "no descender", como se muestra en la figura 5.

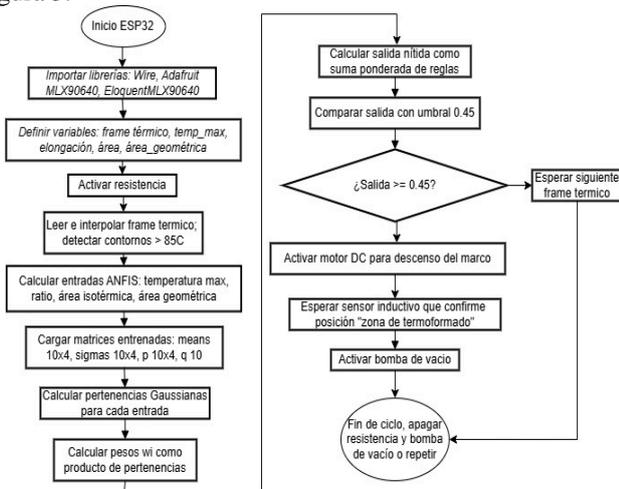


Fig. 5. Diagrama de flujo del *ANFIS* embebido en la termoformadora.

### X. MANUFACTURA Y PRUEBAS DEL SISTEMA *ANFIS*

La figura 6 muestra la máquina de termoformado manufacturada generando un blíster; en el entrenamiento se obtuvieron patrones térmicos mediante visión artificial FIR, como se muestra en la figura 7; así mismo la figura 8 muestra el resultado del termoformado de un blíster con la forma del molde.

La tabla 1 muestra 10 reglas entrenadas por supervisión para flexibilidad y cobertura del sistema dando combinaciones numéricas aprendidas como subconjuntos del espacio de entrada siendo algunas redundantes o intermedias, mientras la tabla 2 muestra los datos difusos en reglas "Sugeno" aprendidos por el sistema.



Fig. 6. Termoformadora de blísteres con control *ANFIS* embebido mediante cámara de visión artificial FIR *MLX90640*

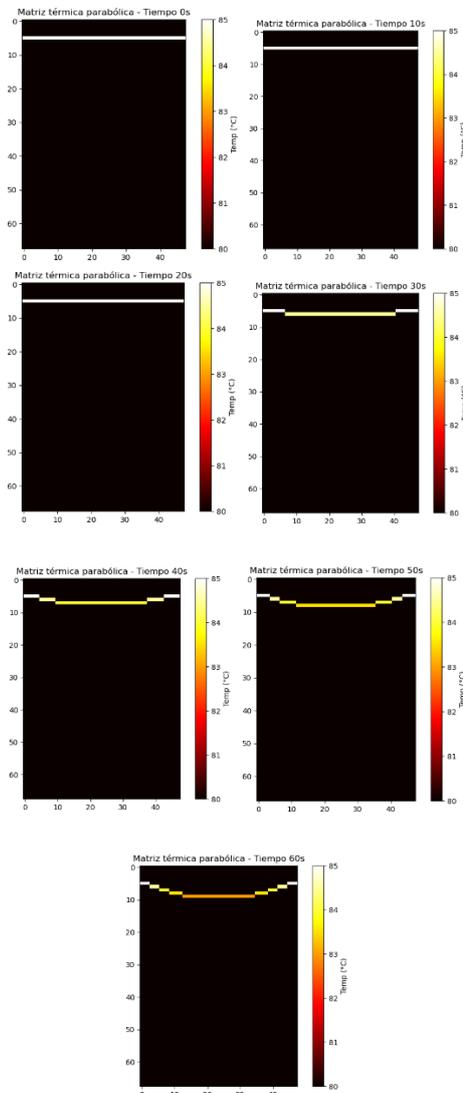


Fig. 7. Patrón de elongación parabólico isotérmico mediante cámara de visión artificial FIR *MLX90640*



Fig.8. Blíster termoformado

Tabla 1. 10 reglas entrenadas.

Regla	Área isotérmica cm <sup>2</sup>	Ratio elongación	Temperatura °C	Área Geométrica px <sup>2</sup>	Resultado (nítido)
R1	Baja (15.0) (≤)	Bajo (1.10) (≤)	Media (75 - 80)	Baja (≤ 200)	No descender
R2	Baja (15.0) (≤)	Medio (1.10 - 1.17)	Alta (> 80)	Media (200 - 380)	Esperar
R3	Media (15.0 - 18.5)	Medio (1.10 - 1.17)	Alta (> 80)	Media (200 - 380)	Esperar
R4	Alta (> 18.5)	Alto (> 1.17)	Alta (> 80)	Alta (> 380)	Descender
R5	Alta (> 18.5)	Medio (1.10 - 1.17)	Media (75 - 80)	Alta (> 380)	Esperar
R6	Media (15.0 - 18.5)	Alto (> 1.17)	Alta (> 80)	Media (200 - 380)	Descender
R7	Alta (> 18.5)	Alto (> 1.17)	Alta (> 80)	Alta (> 380)	Descender
R8	Alta (> 18.5)	Medio (1.10 - 1.17)	Media (75 - 80)	Alta (> 380)	Esperar
R9	Media (15.0 - 18.5)	Alto (> 1.17)	Alta (> 80)	Media (200 - 380)	Descender
R10	Alta (> 18.5)	Alto (> 1.17)	Alta (> 80)	Alta (> 380)	Descender

Tabla 2. Datos difusos en reglas "Sugeno" aprendidos por el sistema

Regla	Temperatura máx (°C)	Ratio elongación	Área isotérmica (cm <sup>2</sup> )	Área geométrica (px <sup>2</sup> )	Salida nítida (decisión)
R <sub>1</sub>	Bajo t < 75	Bajo r < 1.10	Baja a < 15	Baja ag < 300	No descender (≈ 0.0)
R <sub>2</sub>	Medio 75 ≤ t < 80	Medio 1.10 ≤ r < 1.17	Media 15 ≤ a < 18.5	Media 300 ≤ ag < 380	Esperar (≈ 0.5)
R <sub>3</sub>	Alto t ≥ 80	Alto r ≥ 1.17	Alta a ≥ 18.5	Alta ag ≥ 380	Descender (≈ 1.0)

## CONCLUSIONES

Al realizar el modelo matemático de un control *ANFIS*; este permitió diseñar los diagramas de bloques y flujo 1,3 y 5 para la manufactura de la máquina termoformadora de blísteres mediante visión artificial *FIR* con *MLX90640* de la figura 6 y la programación de su sistema de control embebido en un microcontrolador *ESP32* para obtener el blíster de la figura 8.

Al diseñar un control de termoformado mediante un algoritmo *ANFIS*; esto permitió modelar modularmente las secciones de sus componentes en:

a) Adaptativo: se realizó una actualización de parámetros con gradiente descendente mediante el Teorema de convergencia mediante derivadas  $\partial$  y tasa de aprendizaje  $\eta$ .

b) Neuronal: mediante el aprendizaje supervisado con *MSE* que utiliza parámetros ajustables, neuronas como funciones de pertenencia Gaussianas con parámetros ajustables y reglas con conjunto de entrenamiento ( $\zeta$ ) para el aprendizaje artificial.

c) Fuzzy (Difuso): Se trabajó con teoría de conjuntos difusos, funciones de pertenencia Gaussiana y parametrización flexible con aspectos de continuidad, simetría, conjuntos nítidos y complementos para contornos isotérmicos.

d) Inferencial: Se construyó la base de reglas difusas con sus respectivas funciones de pertenencia para las entradas (área isotérmica, temperatura máxima, elongación máxima) mediante inferencia difusa para una salida nítida (*crisp*); así como la validación formal por entrenamiento supervisado.

Al desarrollar el modelado matemático se encadenaron propiedades y axiomas para lograr un teorema de la máquina termoformadora con control *ANFIS*, su demostración formal por inducción y comprobación en pruebas de campo en donde el sistema entrenado pudo tomar decisiones en un entorno térmico, como se aprecia en la figura 8.

Las funciones de pertenencia Gaussianas utilizadas fueron justificadas por sus propiedades de continuidad coincidiendo con Klir & Yuan [13] y Ross [15] en la descripción de propiedades de unicidad de sus parámetros bajo condiciones de simetría como se trabajó con el uso del centro.

El Teorema que describe el aprendizaje por entrenamiento *ANFIS* fue demostrado para  $\zeta$  datos, validando matemáticamente la convergencia del error cuadrático medio; lo que valida el aprendizaje ante condiciones críticas de descenso del marco al decrementar el error.

Se obtuvo una convergencia en el entrenamiento después de 500 pruebas supervisadas una tasa de aprendizaje de  $\eta = 0.58$ .

Se definieron y validaron 4 entradas fundamentales: temperatura máxima ( $x_1$ ), ratio de elongación vertical ( $x_2$ ), Área isotérmica  $\geq 85$  °C ( $x_3$ ) y Área geométrica visual ( $x_4$ ).

Al estructurar las definiciones 1–4; estas permitieron caracterizar la ductilización y elongación del *PETG* como un patrón geométrico parabólico/catenario reconocible por visión artificial térmica; estableciendo mediante calibración que  $b(t) = 5px$  permitía el control adecuado de acuerdo a la definición 3.

Al diseñar el diagrama de flujo general; este permitió modularizar procesos como el de entrenamiento guardando el conocimiento aprendido en matrices  $10 \times 4$  transferidas a un microcontrolador *ESP32*.

La librería *EloquentMLX90640* permitió el reconocimiento de un patrón de elongación mediante visión térmica.

La activación de la resistencia, motor y bomba de vacío se activaron sobre salidas nítidas del *ANFIS*, mostrando respuesta en condiciones controladas.

Se construyó una máquina de termoformado inteligente de bajo costo al utilizar en la manufactura maderera, un microcontrolador *ESP32* y cámara *MLX90640*.

El uso de relevadores de estado sólido garantiza que no se genere un enlace velocidades de conmutación altas; evitando

la probabilidad de fallas de relevadores mecánicos a largo plazo.

Al utilizar la máquina termoformadora de blísteres mediante visión artificial FIR de la figura 6; ésta permitió colocar un molde y una lámina PETG en ella para lograr obtener el blíster de la figura 8.

A diferencia de otros trabajos para termoformado que utilizan un control PID tradicional; el proyecto integró visión térmica como entrada directa al modelo ANFIS, reconociendo patrones geométricos sin contacto al utilizar un FIR.

El trabajo puede servir como texto de modelamiento matemático para sistemas ANFIS al desarrollar y estructurar formalmente mediante teoremas, axiomas y demostraciones poco común en desarrollos aplicados.

#### REFERENCIAS

- [1] Bay Plastics Ltd., *PETG* Datasheet. [Online]. Available: <https://www.bayplastics.co.uk/downloads/datasheets/PETG%20Datasheet.pdf>.
- [2] A. R. Vedire, M. S. Hoo Fatt, and A. K. Pakala, "Effect of temperature on post-yield behavior of PVC foams," *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, vol. 7, pp. 2649–2669, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s41939-023-00354-7>
- [3] IEMAI 3D, Technical Data Sheet – *PETG*. [Online]. Available: [https://www.iemai3d.com/wp-content/uploads/2021/03/PETG\\_TDS\\_EN.pdf](https://www.iemai3d.com/wp-content/uploads/2021/03/PETG_TDS_EN.pdf).
- [4] P. K. Mallick, *Processing of Polymer Matrix Composites*, Boca Raton, FL: CRC Press, 2007, ch. 8.5.5, pp. 357–361. "Resin-wetted fiber rovings subjected to thermal softening tend to deform under gravity, resulting in sagging and the formation of catenary-like shapes typical of thermoplastic behavior during heating."
- [5] Melexis Technologies NV, *MLX90640* Far Infrared Thermal Sensor Array. [Online]. Available: <https://www.melexis.com/en/product/MLX90640/far-infrared-thermal-sensor-array>.
- [6] Espressif Systems, ESP32-S3-WROOM-2 Datasheet. [Online]. Available: [https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32-s3-wroom-2\\_datasheet\\_en.pdf](https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32-s3-wroom-2_datasheet_en.pdf).
- [7] D. A. Greener and Y. T. Hsuan, "Thermoforming of amorphous polymers: A study of temperature-deformation correlation," *Polymer Engineering & Science*, vol. 23, no. 7, pp. 388–393, 1983. doi: 10.1002/pen.760230703.
- [8] J.-S. R. Jang, "ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, no. 3, pp. 665–685, May–Jun. 1993. doi: 10.1109/21.256541.
- [9] S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 2009,
- [10] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132, Jan. 1985.
- [11] R. R. Yager and D. P. Filev, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. New York, NY, USA: Wiley, 1994, ch. 3, pp. 45–50.
- [12] V. Wong, A. Hernández, and M. Pfister, "Real-time strain measurement of polymer deformation using low-resolution thermal cameras and pixel-based elongation algorithms," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 96, no. 1–4, pp. 735–743, 2018. <https://doi.org/10.1007/s00170-017-1554-z>
- [13] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1995.
- [14] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965, doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
- [15] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, 3rd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2010.
- [16] J. Yen and R. Langari, *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*, 1st ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1999.
- [17] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2006.
- [18] M. Brown and C. Harris, *Neurofuzzy Adaptive Modeling and Control*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1994.
- [19] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 2nd ed. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [20] W. S. McCulloch and W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity," *Bull. Math. Biophys.*, vol. 5, no. 4, pp. 115–133, 1943. <https://doi.org/10.1007/BF02478259>
- [21] F. Rosenblatt, "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain," *Psychol. Rev.*, vol. 65, no. 6, pp. 386–408, 1958. <https://doi.org/10.1037/h0042519>
- [22] D. O. Hebb, *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. New York, NY, USA: Wiley, 1949.
- [23] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, "Learning representations by back-propagating errors," *Nature*, vol. 323, no. 6088, pp. 533–536, 1986. doi: 10.1038/323533a0
- [24] T. M. Mitchell, *Machine Learning*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1997, ch. 4, pp. 55–83.
- [25] E. H. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, no. 1, pp. 1–13, 1975. doi: 10.1016/S0020-7373(75)80002-2.
- [26] Y. Liu, Y. Wang, Z. Liu, and Y. Jiang, "A novel adaptive neuro-fuzzy inference system model for short-term wind speed forecasting," *Applied Soft Computing*, vol. 84, pp. 105720, 2019. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105720.
- [27] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 4th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2011.
- [28] T. M. Apostol, *Calculus, Vol. I: One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, 2nd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 1967. Ross, T. J. (2010). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Wiley.
- [29] Jang, J. S. R., Sun, C. T., & Mizutani, E. (1997). *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*. Prentice Hall.
- [30] Rasmussen, C. E., & Williams, C. K. I. (2006). *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press.

# Propuestas de modelos matemáticos en una RNA y teoría de colas.

Fernando Gustavo Isa Massa

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán  
San Miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina

[ferim74@yahoo.com.ar](mailto:ferim74@yahoo.com.ar)

<https://orcid.org/0000-0002-8609-249X>

**Resumen-** La presente investigación, infiere en dos modelos matemáticos : una RNA y un nuevo modelo en teoría de colas. Los dos modelos siguen un riguroso planteamiento matemático con corolarios y demostraciones empíricas. El objetivo es generar un marco de investigación a estrategias de crecimiento en lo matemático y esto aplicado a la economía, la educación y el crecimiento funcional de los pueblos. Los modelos son adaptaciones a el planteamiento matemático, y sus demostraciones tienen a su vez, en algunas ocasiones, más de una demostración. La RNA se la desarrolla en predicción de crisis económica global en la pandemia y futura crisis global en el aumento de las tarifas de importación. El modelo de teoría de colas genera una derivación del modelo de encontrar n clientes en colas y su aplicación en un nuevo modelo, a las distintas crisis económicas y sociales. El modelo de RNA, también es aplicado en educación. Si bien sus aplicaciones son variadas, se eligen algunas de relativa importancia.

**Palabras Clave-** inteligencia artificial, RNAs teoría de colas, economía, educación.

**Abstract-** The present research infers in two mathematical models: an ANN and a new model in queue theory. Both models follow a rigorous mathematical approach with corollaries and empirical demonstrations. The objective is to generate a research framework for growth strategies in mathematics applied to economics, education, and the functional growth of communities. The models are adaptations to the mathematical approach, and their demonstrations sometimes have more than one proof. The ANN is developed for predicting global economic crises during the pandemic and future global crises due to the increase in import tariffs. The queue theory model generates a derivation of the model that finds n customers in queues and its application in a new model addressing various economic and social crises. The ANN model is also applied in education. Although its applications are varied, some of relatively high importance are chosen.

**Keywords-** Artificial intelligence, ANNs. queue theory, economics, education.

**Mathematical Subject Classification:** 60K25, 68T07.

## I. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas como lenguaje de importancia al crecimiento global de los pueblos siguen la temática de la abstracción de la realidad y la búsqueda de patrones. Los modelos matemáticos que se plantean, vienen de esa práctica, y sus diversas aplicaciones nos llevan a la reflexión, no todo puede ser expuesto en un teorema o axioma; algo que Kurt Gödel demuestra en su lógica en los dos teoremas de la incompletitud. Las matemáticas son limitadas, pero la búsqueda de patrones y abstracción de la realidad; siguen siendo el motivo de desarrollo científico y tecnológico que la era moderna nos pide. El modelo de RNA parte de una abstracción en teoría de colas con media y desvío derivado de

la binomial negativa, que es otra de las demostraciones sugeridas. La media y el desvío siguen un riguroso planteo matemático. Si los pesos  $Pr$  son pequeño, las neuronas de la capa oculta tienden a un valor dependiente de  $\alpha$ .

Axiomatización de una red neuronal [2] .-No se suele axiomatizar formalmente como en matemáticas puras y se construye según estos principios básicos:

- 1 - Las entradas pueden representarse como vectores numéricos.
- 2 - Cada neurona transforma sus entradas en una combinación lineal más una función no lineal.
- 3 - Las capas pueden apilarse en forma secuencial o estructurada.
- 4 - El aprendizaje se logra ajustando los pesos .
- 5 - La función de no pérdida se mide el error entre salida esperada y real; y guía el aprendizaje.

Axioma en teoría de colas.-  $(1 - \rho)$ : Probabilidad de llegar primero y tener atención. [3]

Escolio.-Se desprende de este razonamiento:

$$(1 - \rho)_\alpha (1 - \rho)_\alpha (1 - \rho)_\alpha \dots (1 - \rho) = (1 - \rho)^n$$

## II. TEOREMA DE RED NEURONAL DE PÉRDIDAS.

Si la probabilidad de llegar primero y ser atendido es  $(1 - \rho)$ , entonces la probabilidad de perder clientes en cola monocola-monocanal en el tiempo es:  $P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/t}$  y la sucesión de pesos de esta probabilidad con una propagación hacia atrás de la siguiente manera  $\rho_2 = (\rho \cdot (1 - \rho))^2$ , y las neuronas ocultas toman el valor de:  $O = \frac{1}{e^{((1-Pr1) \cdot (1-Pr2) \dots (1-Prn))\alpha}}$  donde  $\alpha$  es una tasa de decrecimiento es una red neuronal de perdidas

RNA [1] es un conjunto de neuronas artificiales conectadas entre sí en estructuras llamadas capas. Cada neurona recibe entradas, les aplica un cálculo (normalmente una combinación lineal + función de activación) y genera una salida que pasa a la siguiente capa.

Capas de una red neuronal

- 1- Capa de entrada (input layer): Es donde entra el dato bruto como pueden ser valores numéricos
- 2- Capas ocultas (hidden layers): procesan la información aplicando funciones matemáticas. Pueden ser muchas, y mientras más haya, más compleja es la red. Cada neurona en esta capa realiza  $Y = f(\sum w_i x_i + b)$
- 3- Capa de salida: devuelve el resultado final □

Demostración.-Este razonamiento es el de llegar primero una y otras veces y no irse al ser primero en la cola. Se usa la notación de “producto”, al darse: “una cosa y la otra y la otra”; repetidas veces hasta una cierta cantidad “n”. Entonces el llegar en cualquier posición; menos la de primero e irse con una cierta probabilidad es el complemento del razonamiento y axiomas descritos:

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^n$$

$$N = \frac{1}{t}$$

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/t}$$

Para este razonamiento usamos teoría de colas. El  $\rho$ , supone el factor de tráfico del sistema; en teoría de colas. ■

Segunda Demostración:

Binomial Negativa (Pascal - Polya)

$$P_{(n=m)} = C_{(n-1, x-1)} p^x q^{(n-x)} \quad [4]$$

$$P_{(n=m)} = \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^x q^{(n-x)}$$

$C_{(n-1, x-1)}$  Este término cuenta las formas de distribuir  $x - 1$  éxitos en los primeros  $n - 1$  ensayos, dejando el último ensayo  $n$  como el éxito final

- 1 - Cuenta combinatoriamente las formas posibles de obtener  $x - 1$  éxitos en  $n - 1$  ensayos
  - 2 - Refleja la estructura de los ensayos previos al éxito final
  - 3 - Es clave para construir la probabilidad de un número específico de ensayos hasta lograr un número dado de éxitos
- p: probabilidad de éxito  
q: probabilidad de fracaso  
x: cantidad éxitos  
n: cantidad de intentos

Hago  $x = n$ . Probabilidad de  $n$  éxitos en  $n$  intentos.

$$P_r = \frac{(n-1)!}{(n-n)!(n-1)!} p^n q^{(n-n)}$$

$$P_r = \frac{1}{0!} p^n q^0$$

$$P_r = p^n$$

$$p = (1 - q)$$

$$P_r = (1 - q)^n$$

$$q = \rho$$

$$P_r = (1 - \rho)^n$$

Complemento:

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^n$$

Consideremos a  $n$  como la cantidad de intentos, por ese motivo el tiempo es inversamente proporcional a los  $n$  intentos, debido a que al aumento del tiempo  $t$  la probabilidad  $P_r$  toma su menor valor, entendiéndose esto como en el transcurso de mayor tiempo la probabilidad de pérdida es relativamente menor por ser un sistema de mejora de las pérdidas. De la misma manera, al considerarse el inicio del tiempo  $t = 0$ , la probabilidad final  $P_r$  es mayor.

$$N = \frac{1}{t}$$

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/t}$$

Extremos Relativos

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq t < \infty$$

$$0 \leq P_r \leq 1$$

Veamos los valores de probabilidad para los extremos relativos de  $\rho$  y  $n$ .

Para  $\rho = 0$

$$P_r = 1 - (1 - 0)^{1/t}$$

$$P_r = 1 - 1 = 0$$

Como referencia a este valor de  $P_r$  podemos definir que a bajos valores de  $\rho$  representación de poca actividad de las colas de espera.

Para  $\rho = 1$

$$P_r = 1 - (1 - 1)^{1/t}$$

$$P_r = 1 - 0 = 1$$

Para  $t = 0$

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/0}$$

$$P_r = 1 - 0 = 1$$

Para  $t \rightarrow \infty$

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/\infty}$$

$$P_r = 1 - 1 = 0$$

Probabilidad de Perder Clientes en Cola en el tiempo

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/t} \quad \blacksquare$$

Axiomatización [5]

Los intentos de uso del sistema son independientes del tiempo. La probabilidad de no usar el sistema en un período es:  
1-  $\rho$

Justificación: Esto permite modelar la no ocurrencia del evento como una multiplicación de probabilidades en distintas unidades de tiempo.

**Axioma 2**

Tiempo se divide en unidades iguales

El tiempo total de análisis  $t$  se divide en  $1/t$  unidades, o fraccionar el tiempo en que ocurre un evento aleatorio.

Justificación: permite modelar la probabilidad acumulada en una pequeña unidad de tiempo, como límite o probabilidad marginal.

**Axioma 3**

La probabilidad de que al menos un uso ocurra en un intervalo se modela como:  $P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/t}$

Justificación: Si la probabilidad de no usar es  $1 - \rho$ , entonces la probabilidad de no usarlo en una fracción de tiempo es  $(1 - \rho)^{1/t}$

$$0 \leq P_r \leq 1$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq t < \infty$$

**III. MEDIA.**

Desde la  $j$ -ésima prueba mediante la variable aleatoria de Bernoulli  $I_j$ , que toma los valores 0 y 1 con probabilidades  $q$  y  $p$ . El número de fallos se mide como la suma de  $n$  variables independientes [6]

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

La media de cualquier  $I_j$  es  $E(I_j) = (0) \cdot (p) + (1) \cdot (q) = q$

Al considerar la cantidad de éxitos como nula, entonces podemos considerar valor cero productos con la probabilidad de éxito  $p$ ; y valor 1 producto de la probabilidad de fracaso  $q$ .

La media de la distribución binomial  $\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) = q + q + \dots + q = n \cdot q$

Ya que sabemos:  $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Donde  $E(X)$  es la esperanza de  $X$

Con lo que se demuestra la media

**Definición:**

$\mu$ : Media total de fracasos (esperanza matemática del total)

$E(X)$ : esperanza matemática (valor esperado)

$I_j$ : Variable indicadora de fracaso en el intento  $j$

$Q$ : probabilidad de fracaso en un solo intento

$N$ : número total de intentos

1 - Modelo de Bernoulli

Cada intento es un experimento de Bernoulli

$I_j \sim \text{Bernoulli}(q)$  con  $P(I_j = 1) = q$   $P(I_j = 0) = 1 - q$

2 - Independencia

Los intentos son independientes entre si

Para todo  $j \neq k, I_j \perp I_k$

3 - Linealidad de la esperanza matemática

$$E\left(\sum_{j=1}^n I_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^n E(I_j)\right)$$

4 - Esperanza de una variable Bernoulli

$$E(I_j) = q$$

La media nace de un cálculo para la binomial. Este nos lleva a:

$$N = \frac{1}{t}$$

$$\mu = \frac{1}{t} \cdot q$$

Es decir, la media es el producto del inverso de tiempo por la probabilidad de fracaso.

**IV. DESVÍO.**

El desvío nace de un cálculo de la binomial. Este nos lleva a:

$$\sigma^2 = \frac{1}{t} \cdot p \cdot q \quad [7]$$

Formula exacta del desvío de la Binomial [8]

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

$N$ : número de ensayos

$P$ : probabilidad de éxito

$Q = 1 - p$ : probabilidad de fracaso

$$N \cdot p \cdot q = \frac{1}{t} \cdot p \cdot q$$

Entonces

$$N = \frac{1}{t}$$

Axioma 1.-Probabilidad de éxito y fracaso

$$P \in (0,1)$$

$$Q = 1 - p$$

Axioma 2.-Número de ensayos

$N \in \text{Naturales}$

Axioma 3.-Varianza de la distribución Binomial

$X \sim \text{Bin}(n,p)$  es

$$\sigma^2 = \frac{1}{t} \cdot p \cdot q$$

Con  $t = \frac{1}{t}$

Axioma 4.-Linealidad en  $p \cdot q$

La varianza es directamente proporcional al producto  $p \cdot q$ , que representa la dispersión potencial por ensayo

$$O = \frac{1}{e^{((1-Pr1) \cdot (1-Pr2) \dots (1-Prn)) \cdot \alpha}}$$

$$\frac{DO}{D\alpha} = -k \cdot O$$

$$\frac{DO}{O} = -k \cdot D \propto$$

$$\ln O = -k \cdot \alpha$$

$$O = \frac{1}{e^{k \cdot \alpha}}$$

$$K = ((1 - Pr1) \cdot \dots \cdot (1 - Prn))$$

Si  $Pr \rightarrow 1$

$$O = \frac{1}{e^{((1-1) \cdot (1-1) \dots (1-1)) \cdot \alpha}}$$

$$O = \frac{1}{e^0} = 1$$

Los valores de los nodos de la capa oculta aumentan con una probabilidad de pérdida o pesos grandes

Si  $Pr \rightarrow 0$

$$O = \frac{1}{e^{((1-0) \cdot (1-0) \dots (1-0)) \cdot \alpha}}$$

$$O = \frac{1}{e^\alpha}$$

Si los pesos  $P_r$  son pequeño, las neuronas de la capa oculta tienden a un valor dependiente de  $\alpha$ .

Corolario 1.-Si  $t=1$ , entonces  $P_r=\rho$  y es su máximo valor sabiendo esto la probabilidad de perder se concentra en su valor de  $\rho$  o de fracaso.

Demostración

$$P_r = 1 - (1 - \rho)^{1/1}$$

$$P_r = 1 - (1 - \rho)$$

$$P_r = \rho$$

Corolario 2.-Solo se van clientes insatisfechos, entonces  $\rho=1$

Demostración:

$$P_r = 1 - (1 - 1)^{1/t}$$

$$P_r = 1$$

Corolario 3.-Si el sistema es eficiente, no se van clientes

Demostración

$$\rho=0$$

$$P_r = 1 - (1 - 0)^{1/t}$$

$$P_r = 0$$

Teorema 2.- Si conocemos la probabilidad de llegar y encontrar  $n$  clientes en cola en colas monocola – monocanal , según la notación Kendall – Lee es  $(M/M/1):(FIFO/\infty/\infty)$ , una sola cola y un solo servidor o canal de atención:  $Pr = (1 - \rho) \cdot \rho^n$  [9], entonces si observamos un crecimiento de  $\rho$  la probabilidad se transforma en:  $Pr = (1 - \rho \cdot \Delta\rho) \cdot (\rho \cdot \Delta\rho)^n$   $\square$

Demostración :

Consideremos un incremento de  $\rho$

- $\rho \in [0,1]$  una probabilidad
- $\Delta\rho$  un incremento asociado a  $\rho$
- $N \in \text{Naturales}$
- $\tilde{\rho} = \rho \cdot \Delta\rho$
- $C = 1 - \tilde{\rho}$

$$Pr = (1 - \rho \cdot \Delta\rho) \cdot (\rho \cdot \Delta\rho)^n$$

$$0 \leq \Delta\rho \leq 1$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Entonces se demuestra

$$0 \leq \rho \cdot \Delta\rho \leq 1$$

$$0 \leq (\rho \cdot \Delta\rho)^n \leq 1$$

$$0 \leq Pr \leq 1$$

Escolio.-En el COVID la pandemia generó a nivel global una baja en el mercado interno, exportación y suba de inflación. Los valores son de 2020.

Tabla 1.Países y su mercado interno, exportación e inflación

País	Merc. Int.	Exp.	Inflación
Argentina	13%	15%	36,1%
México	11%	9%	3,15%
España	10,8%	10%	-0,5% (deflación)

Veamos los pesos con un tiempo  $t$  de 2 años que es lo que duró la pandemia. Las variables de entrada son los países y las

neuronas ocultas son las bajas de mercado interno, exportación y suba de inflación.

Las capas ocultas son fundamentales en las RNA, por su capacidad de aprendizaje y generalización.

Capa oculta [10].- Es una capa intermedia entre la capa de entrada (inputs) y la capa de salida (outputs)

Se llama oculta porque sus neuronas no son directamente observables (sin embargo en la presente RNA está considerado que las neuronas de la capa oculta tienen valores que se sacan de la realidad), no producen salidas directamente (la misma definición, las salidas son importantes al análisis del modelo).

Importancia de la capa oculta

- Transforma datos de entrada en una representación interna útil
- Introduce no linealidad entre entrada y salida
- Capacidad de aproximación universal
- Extrae características

Axioma 1.-Una red neuronal artificial contiene al menos una capa que no es de entrada ni de salida

$$\exists f^{(l)} : 1 < l < L \text{ (capa oculta)}$$

Axioma 2

$$\exists N \text{ con capa oculta tal que para todo } \epsilon > 0, \|f(x) - N(x)\| < \epsilon$$

Este es el teorema de aproximación universal



Fig. 1. Inteligencia artificial en economía

$$\rho_1 = 0,13$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,13)^{1/2}$$

$$P_{r1} = 0,06726$$

$$\rho_2 = 0,15$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,15)^{1/2}$$

$$P_{r2} = 0,07804$$

$$\rho_3 = 0,361$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,361)^{1/2}$$

$$P_{r3} = 0,20062$$

$$\rho_4 = 0,11$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,11)^{1/2}$$

$$P_{r4} = 0,056601$$

$$\rho_5 = 0,09$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,09)^{1/2}$$

$$P_{r5} = 0,04606$$

$$\rho_6 = 0,0315$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,0315)^{1/2}$$

$$P_{r6} = 0,01587$$

$$\rho_7 = 0,108$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,108)^{1/2}$$

$$P_{r7} = 0,05554$$

$$\rho_8 = 0,10$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,10)^{1/2}$$

$$P_{r8} = 0,051316$$

$$\rho_9 = 0,005$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,005)^{1/2}$$

$$P_{r9} = 0,002503$$

Los  $P_r$  son los pesos, ahora calculamos los valores de las neuronas ocultas

$$\alpha = 3$$

$$O1 = \frac{1}{e^{((1-0,06726) \cdot (1-0,04606) \cdot (1-0,051316))^3}}$$

O1 = 0,14519 (Este valor es correspondiente a la neurona oculta mercado interno)

$$O2 = \frac{1}{e^{((1-0,07804) \cdot (1-0,056601) \cdot (1-0,05554))^3}}$$

O2 = 0,14331 (Este valor es correspondiente a la neurona oculta exportaciones)

$$O3 = \frac{1}{e^{((1-0,20062) \cdot (1-0,01587) \cdot (1-0,002503))^3}}$$

O3 = 0,15208 (Este valor es correspondiente a la neurona oculta inflación)

#### Definición de elementos

- $P_i \in [0,1]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$
- Axioma 1: Dominio de parámetros, cada  $P_i$  representa una probabilidad de proporción
- Axioma 2:  $N \in \text{Naturales}$
- Producto de complementos
- $P = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$
- Axioma 3: producto de complementos y es probabilístico
- Media de productos:  $\frac{P}{n}$
- Forma axiomática final  
 $P_1, p_2, \dots, p_n \in [0,1]$   
 $N \in \text{Naturales}$
- $P = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

$$S = \frac{1}{e^{((1-0,1) \cdot (1-0,2) \cdot (1-0,3))^3}}$$

$$S = \frac{1}{e^{((1-0,14519) \cdot (1-0,14331) \cdot (1-0,15208))^3}}$$

S = 0,17914 (Salida del sistema)

La salida del sistema a medida que la probabilidad va aumentando dimensiona una posible recesión en estos tres países

A modo de ejemplo calculamos los valores de  $\rho$  que van cambiando los pesos  $P_r$

$$\rho_{1.1} = (\rho_1 \cdot (1 - \rho_1))^2$$

$$\rho_{1.1} = (0,13 \cdot (1 - 0,13))^2$$

$$\rho_{1.1} = 0,01279$$

Y de esta manera se van calculando los distintos valores de pesos  $P_r$  y luego los valores de neuronas ocultas y de salida.

Es probable, y como ocurrió, una recesión mundial.

Con valores actuales, esta inteligencia artificial puede predecir una nueva recesión mundial de aplicarse las políticas de aumento de tarifas a las importaciones en EEUU. Cabe señalar,

que esto puede durar unos años o quizás más; dependiendo de si se vuelve atrás en esta política económica.

#### Ejemplo 2

Para saber la situación social en cuanto a la educación en México en distintos estados y referidos a la deserción o desgranamiento en la secundaria y primaria.

Estos valores son aproximaciones y corresponden como fines matemáticos a una mejora en la situación social.

Tabla 2. Inteligencia artificial para la educación

Estado	Deserción Secundaria (Capa Oculta)	Deserción Primaria (Capa Oculta)
Ciudad de México (Capa Entrada)	3,2%	2,1%
Puebla (Capa Entrada)	2,1%	0,4%

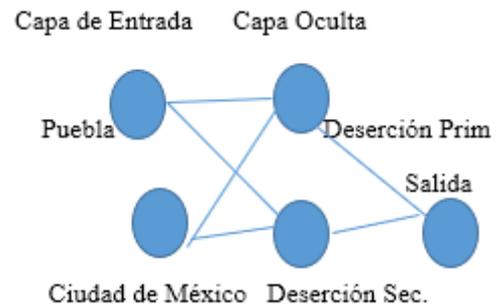


Fig. 2. Inteligencia artificial en educación

$$\rho_1 = 0,032 \text{ (Ciudad de México-Sec.)}$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,032)^{1/2}$$

$$P_{r1} = 0,01613$$

$$\rho_2 = 0,021 \text{ (Ciudad de México-Prim.)}$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,021)^{1/2}$$

$$P_{r2} = 0,01055$$

$$\rho_3 = 0,021 \text{ (Puebla-Sec.)}$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,021)^{1/2}$$

$$P_{r3} = 0,01055$$

$$\rho_4 = 0,004 \text{ (Puebla-Prim.)}$$

$$P_r = 1 - (1 - 0,004)^{1/2}$$

$$P_{r4} = 0,002002$$

$$\alpha = 3$$

$$O1 = \frac{1}{e^{((1-0,01613) \cdot (1-0,01055))^3}}$$

O1 = 0,12592 (Este valor es correspondiente a la neurona oculta deserción secundaria)

$$O2 = \frac{1}{e^{((1-0,01055) \cdot (1-0,002002))^3}}$$

O2 = 0,12417 (Este valor es correspondiente a la neurona oculta deserción primaria)

$$S = \frac{1}{e^{((1-0,1) \cdot (1-0,2))^3}}$$

$$S = \frac{1}{e^{((1-0,12592) \cdot (1-0,12417))^3}}$$

$$S = 0,15502 \text{ (Salida del sistema)}$$

La tendencia con la actualización de pesos es un incremento de estos valores, que si bien tienen mucho sesgo; representan una situación preocupante a la región y específicamente a México.

Tabla 3. Ejemplo teorema 2: Incremento en los salarios e incremento en el consumo

País	Incremento salario (2024-2025)	Consumo Pollo
México	0,12 (12%)	0,025 (2,5%)
Colombia	0,09 (9%)	-0,025 (-2,5%)
Argentina	-0,16 (-16%)	0,015 (1,5%)
Costa Rica	0,02 (2%)	0,037 (3,7%)

$$Pr = (1 - \rho \cdot \Delta\rho) \cdot (\rho \cdot \Delta\rho)^n$$

México

Pr = 0,85 (Probabilidad alta para ambientes propicios de crecimiento 2024-2025)

$\Delta\rho = 0,12$  (Variación de incremento de salario 2024-2025)

$\rho = 0,025$  (Este valor de  $\rho$  corresponde a un análisis de consumo de pollo)

$$\text{Ln} \frac{Pr}{(1 - \rho \cdot \Delta\rho)} = n \cdot \text{Ln} (\rho \cdot \Delta\rho)$$

N = 0,02745 El valor de n significa una mejora de 2,745% en los niveles de consumo de período 2024-2025

$N \approx \rho$

Costa Rica

Pr = 0,85 (Probabilidad alta para ambientes propicios de crecimiento 2024-2025)

$\Delta\rho = 0,02$  (Variación de incremento de salario 2024-2025)

$\rho = 0,037$  (Este valor de  $\rho$  corresponde a un análisis de consumo de pollo)

$$\text{Ln} \frac{Pr}{(1 - \rho \cdot \Delta\rho)} = n \cdot \text{Ln} (\rho \cdot \Delta\rho)$$

N = 0,02244 El valor de n significa una mejora de 2,244% en los niveles de consumo de período 2024-2025

$N \approx \Delta\rho$  Lo que nos trae como observación incrementos salarios que mejoraran en el período 2024-2025

Tabla 2. Ejemplo 2 : Aumento de empleo y aumento de estudiantes

País	Aumento Matrícula univ.	Aumento de empleo (2024)
México	0,58 (58%)	0,028 (2,8%)
Colombia	0,27 (27%)	0,027 (2,7%)
Argentina	0,37 (37%)	0,037 (3,7%)

México

Pr = 0,75 (Probabilidad alta para ambientes propicios de crecimiento 2024)

$\Delta\rho = 0,58$  (Variación de incremento de matrícula universitaria 2024)

$\rho = 0,028$  (Este valor de  $\rho$  corresponde a un análisis de incremento de empleos)

$$\text{Ln} \frac{Pr}{(1 - \rho \cdot \Delta\rho)} = n \cdot \text{Ln} (\rho \cdot \Delta\rho)$$

N = 0,06584 El valor de n significa una mejora de 6,584% en los niveles de creación de empleos 2024

$N \approx \Delta\rho$

Colombia

Pr = 0,75 (Probabilidad alta para ambientes propicios de crecimiento 2024)

$\Delta\rho = 0,27$  (Variación de incremento de matrícula universitaria 2024)

$\rho = 0,027$  (Este valor de  $\rho$  corresponde a un análisis de incremento de empleos)

$$\text{Ln} \frac{Pr}{(1 - \rho \cdot \Delta\rho)} = n \cdot \text{Ln} (\rho \cdot \Delta\rho)$$

N = 0,05697 El valor de n significa una mejora de 5,697% en los niveles de creación de empleos 2024

Argentina

Pr = 0,75 (Probabilidad alta para ambientes propicios de crecimiento 2024)

$\Delta\rho = 0,37$  (Variación de incremento de matrícula universitaria 2024)

$\rho = 0,037$  (Este valor de  $\rho$  corresponde a un análisis de incremento de empleos)

$$\text{Ln} \frac{Pr}{(1 - \rho \cdot \Delta\rho)} = n \cdot \text{Ln} (\rho \cdot \Delta\rho)$$

N = 0,06382 El valor de n significa una mejora de 6,382% en los niveles de creación de empleos 2024.

## V. CONCLUSIONES.

Un planteamiento matemático genera soluciones diversas es inferencial y probabilístico; también cabe aclarar, que es útil a otras ramas como la geología y actividad sísmica, el medio ambiente, la seguridad ciudadana y otros. La red neuronal propuesta surge de una abstracción en teoría de colas y es novedosa desde la perspectiva de usar la teoría de las decisiones en las RNA. Se plantea como solución o predicciones a la calidad educativa y a las predicciones de una probable recesión mundial por la política de tarifas de EEUU. Su aporte en el plano científico y de ciencias sociales es fundamental para entender el contexto actual, un poco caótico y por lo tanto casi impredecible. Esto nos lleva a la conclusión de que las RNA, como método innovador de la IA, pueden ser usadas en la abstracción de fenómenos complejos de difícil resolución. El segundo modelo de derivación de teoría de colas sirve para ciencias sociales entre otras ciencias y sus aplicaciones explican que este modelo de incrementos puede ser usado fuera del ámbito de colas de espera; y más precisamente, en economía y educación. Desde esa resolución es novedoso el uso de la teoría de colas.

## AGRADECIMIENTOS

A los árbitros y sus generosas correcciones, Dr. Herrera, Marcos Fajardo, a mi familia y amigos, AUS Damián García Pascualini, Ing. Gustavo Carrasco, Cdr Arturo López, Cdr Adolfo Rodríguez, Prof. María Leonor Gómez Llanos, Ing. Fanny Herrera, Dr ing. Jorge Perera, Luis Sacaba, Ing. Ricardo Adra, Sacerdote Miguel Galland, Ing Joaquín Igon. Lic Diego Di Pietro.

## REFERENCIAS

- [1] Goodfellow, I., Bengio, Y. and Courville, A., 2016. Deep learning. Cambridge, MA: MIT Press.
- [2] Haykin, S., 2009. Neural networks and learning machines. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education
- [3] Gross, D., Shortle, J.F., Thompson, J-M- and Harris, C.M., 2008. Fundamentals of queueing theory. 4th ed. Hoboken, NJ: Wiley
- [4] Kleinrock, L., 1975. Queueing systems. Volume 1: Theory. New York: Wiley-Interscience
- [5] Allen, A. O., 1990. Probability, statistics, and queueing. 2nd ed. San Diego: Academic Press
- [6] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G., 1993. Stochastic models of manufacturing systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- [7] Ross, S.M., 2014. Introduction to probability models. 11th ed. Amsterdam: Academic Press
- [8] Grimmett, G. and Stirzaker, D., 2001. Probability and random processes. 3rd ed. Oxford: Oxford University Press
- [9] Lipsky, L., 2009. Queueing Theory. New York, NY: Springer
- [10] Aggarwal, C. C., 2018. Neural networks and deep learning: A textbook. Cham: Springer

*Journal de*  
*Objetos y*  
*Objetivos*  
*M*atemáticos